ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Nuray GÜL

İKİ TOPOLOJİLİ UZAYLARDA BAZI AYIRMA AKSİYOMLARI

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ADANA, 2011

ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İKİ TOPOLOJİLİ UZAYLARDA BAZI AYIRMA AKSİYOMLARI

Nuray GÜL

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Bu Tez 05/10/2011 Tarihinde Aşağıdaki Jüri Üyeleri Tarafından Oybirliği/Oyçokluğu ile Kabul Edilmiştir.

....	....	…...
Doç. Dr. Fikret KUYUCU	Doç. Dr. Ali A. ÖZKURT	Doç. Dr. Perihan DİNÇ ARTUT
DANIŞMAN	ÜYE	ÜYE

Bu Tez Enstitümüz Matematik Anabilim Dalında hazırlanmıştır.
Kod No:

Prof. Dr. İlhami YEĞİNGİL
Enstitü Müdürü

Not: Bu tezde kullanılan özgün ve başka kaynaktan yapılan bildirişlerin, çizelge ve fotoğrafların kaynak gösterilmeden kullanımı, 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunundaki hükümlere tabidir.

ÖZ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

İKİ TOPOLOJİLİ UZAYLARDA BAZI AYIRMA AKSİYOMLARI

Nuray GÜL

ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Danışman : Doç. Dr. Fikret KUYUCU
Yıl : 2011, Sayfa: 55
Jüri : Doç. Dr. Fikret KUYUCU
: Doç. Dr. Ali A. ÖZKURT
: Doç. Dr. Perihan DİNÇ ARTUT

(X,τ) bir topolojik uzay ise bu uzay üzerinde Hausdorff (T_2), regüler, T_3, tam regüler, normal, $T_{3,5}$ ve T_4 gibi ayırma aksiyomları incelenebilir. Eğer X bir küme ve τ_1, τ_2, X üzerinde iki topoloji ise (X,τ_1,τ_2)' ye iki topolojili uzay denir. İki topolojili uzaylarla ilgili çalışmalar Kelly(1963) ile başlamıştır. (X,τ) için tanımlanan ayırma aksiyomları ve kompaktlık iki topolojili uzaylara da genişletilebilir.

Bu çalışmanın amacı, iki topolojili uzaylarda ayırma aksiyomlarını, aralarındaki ilişkiyi ve kompaktlığı incelemektir.

Anahtar Kelimeler: İki topolojili uzaylar, ayırma aksiyomları

ABSTRACT

MSc. THESIS

ON SOME SEPARATION AXIOMS ON BITOPOLOGICAL SPACES

Nuray GÜL

ÇUKUROVA UNIVERSITY
INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
DEPARTMENT OF MATHEMATICS

Supervisor : Assoc. Prof. Dr. Fikret KUYUCU
Year : 2011, Pages:55
Jury : Assoc. Prof. Dr. Fikret KUYUCU
: Assoc. Prof. Dr. Ali A. ÖZKURT
: Assoc. Prof. Dr. Perihan DİNÇ ARTUT

If (X,τ) is a topological space, then the separation axioms such as Hausdorff(T_2), regular, T_3, completely regular, normal, $T_{3,5}$ and T_4 axioms can be studied. If X is a set, and τ_1 and τ_2 are two topologies on X, then (X,τ_1,τ_2) is called bitopological space. The study on bitopological space was first undertaken by Kelly(1963). The separation axioms and compactness defined for (X,τ) can also be extended into bitopological spaces.

The study aims to examine the separation axioms, the relationship between them and compactness in the bitopological spaces.

Key Words: Bitopological spaces, separation axioms

TEŞEKKÜR

Bu çalışmamın gerçekleşmesinde değerli bilgileri ve deneyimlerinden yararlandığım, bana her zaman, her konuda yol gösteren ve sabırla yardımcı olan değerli hocam Doç. Dr. Fikret KUYUCU' ya, öğrenimim boyunca bana emeği geçen tüm hocalarıma, arkadaşlarıma ve bugüne kadar maddi manevi destekleriyle beni hiç yalnız bırakmayan sevgili aileme sonsuz teşekkürler.

İÇİNDEKİLER **SAYFA**

1. GİRİŞ

Bu tezde; iki noktayı, bir küme ile dışındaki herhangi bir noktayı veya ayrık iki kümeyi, açık kümeleri kullanarak birbirinden ayırmayı tarif eden ve ayırma aksiyomları olarak da bilinen kavramların bazılarının iki topolojili uzaylardaki genellemeleri incelenmiştir. Bu çalışma üç bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm; çalışmamızla ilgili olan klasik topolojideki kavram ve teoremlerden oluşmaktadır. İkinci bölümde, iki topolojili uzaylar ile ilgili temel bilgiler verilmiştir. Üçüncü bölümde ise klasik topolojideki bazı ayırma aksiyomlarının iki topolojili uzaylarda ki genellemesi incelenmiştir.

1.1. Temel Tanım ve Özellikler

Bu bölümde genel olarak topolojik uzaylar hakkında iyi bilinen temel tanım ve özellikleri özetlenmiştir.

X bir küme olsun. $P(X) = \{A: A \subseteq X\}$ ailesine *X' in kuvvet kümesi* denir.

$\tau \subset P(X)$ ve I bir indis kümesi olsun. Eğer,

(t1) $\emptyset, X \in \tau$

(t2) Her $U, V \in \tau$ için $U \cap V \in \tau$

(t3) Her $i \in I$ için $U_i \in \tau$ ise $\bigcup_{i\in I} U_i \in \tau$

koşulları sağlanırsa τ ailesine X kümesi üzerinde bir topoloji (X,τ) ikilisine bir *topolojik uzay* denir.

(X,τ) bir topolojik uzay ve $B \subseteq \tau$ olsun. Eğer τ' nun her bir elemanı B' nin bir takım elemanlarının bir birleşimi olarak yazılabiliyorsa B' ye *τ' nun bir bazı* denir. Yani;

a) $B \subseteq \tau$

b) $U \in \tau$ ise $\bigcup_{i\in I} B_i$ olacak şekilde bir $\{B_i : i \in I\} \subseteq B$ ailesi vardır.

(X,τ_x) ve (Y,τ_y) herhangi iki topolojik uzay, $f: X \to Y$ bir fonksiyon ve $x_0 \in X$ olsun. Y uzayında $f(x_0)$' ın her V komşuluğu için $f(U) \subseteq V$ olacak şekilde

X uzayında x_0' ın bir U komşuluğu varsa f fonksiyonuna x_0 *noktasında süreklidir* denir.

(X,τ) bir topolojik uzay, $x \in X$ ve $K \subseteq X$ olsun. En az bir $U \in \tau$ için $x \in U \subseteq K$ olacak şekilde bir $U \subseteq X$ kümesi varsa K kümesine x*' in bir komşuluğu* denir. Dolayısıyla x' i içeren her $U \in \tau$, x' in bir komşuluğu olur. Bu tür komşuluklara *açık komşuluklar* denir.

x' in bütün komşuluklarının kümesi;

$$\mathcal{K}(x) = \{K \subseteq X : \exists U \in \tau \ni x \in U \subseteq K\}$$

x' in bütün açık komşuluklarının kümesi;

$$\mathcal{U}(x) = \{U \subseteq X : x \in U \in \tau\}$$

dir.

(X,τ) bir topolojik uzay, $x \in X$ ve $B(x) \subseteq \mathcal{U}(x)$ olsun. Eğer her $U \in \mathcal{U}(x)$ için $x \in B \subseteq U$ olacak şekilde bir $B \in B(x)$ kümesi varsa $B(x)$ ailesine x *noktasının bir lokal bazı (komşuluk bazı)* denir.

(X,τ) bir topolojik uzay olsun. Eğer her $x \in X$ için x noktasının sayılabilir bir $B(x)$ lokal bazı varsa bu topolojik uzaya *birinci sayılabilir uzay* denir.

Bir (X,τ) topolojik uzayı sayılabilir bir B bazına sahip ise (X,τ) topolojik uzayına *ikinci sayılabilir uzay* denir.

X bir topolojik uzay ve $\mathbb{N}$ de doğal sayılar kümesi olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için $f(n) = x_n$ olmak üzere $f : \mathbb{N} \to X$ şeklindeki her fonksiyona X uzayında bir *dizi* denir.

(X,τ) topolojik uzay, (x_n) bu uzayda bir dizi ve $x_0 \in X$ olsun. Her $U \in \tau$, $U \subseteq X$ ve $x_0 \in U$ için $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ vardır ki $n \geq n_0$ iken $x_n \in U$ oluyorsa (x_n) *dizisi* x_0*' a yakınsıyor* veya (x_n) dizisinin $n \to \infty$ için *limiti* x_0 *dır* denir.

Bir Σ kümesi üzerinde aşağıdaki özellikleri sağlayan bir $\leq$ bağıntısına yönlendirme bağıntısı ve üzerinde böyle bir bağıntı tanımlanmış olan kümeye *yönlendirilmiş küme* denir.

(a) Her $\sigma \in \Sigma$ için $\sigma \leq \sigma$,

(b) $\sigma_1 \leq \sigma_2$ ve $\sigma_2 \leq \sigma_3$ ise $\sigma_1 \leq \sigma_3$,

(c) Her $\sigma_1, \sigma_2 \in \Sigma$ için $\sigma_1 \leq \sigma_3$ ve $\sigma_2 \leq \sigma_3$ olacak şekilde bir $\sigma_3 \in \Sigma$ vardır.

X bir küme ve Σ da herhangi bir yönlendirilmiş küme olsun.

$\sigma \in \Sigma$ için $f(n) = x_\sigma$ olmak üzere her $f: \Sigma \to X$ fonksiyonuna X' de bir *ağ* denir.

Şimdi aşağıdaki ayırma aksiyomlarını hatırlayalım.

(X, τ) topolojik uzay olsun.

(1) $\forall x, y \in X, x \neq y$ için $x \in U, y \notin U$ ve $x \notin V, y \in V$ olacak şekilde U ve V açık kümeleri varsa (X, τ) topolojik uzayına T_1 *uzayı* denir

(2) $\forall x, y \in X, x \neq y$ için $x \in U$ ve $y \in V$ olacak şekilde U ve V ayrık açık kümeleri varsa (X, τ) topolojik uzayına *Hausdorff uzay* denir.

(3) X içinde her F kapalı kümesi ve $x \notin F$ için $x \in U$ ve $F \subseteq V$ olacak şekilde U ve V ayrık açık kümeleri varsa (X, τ) topolojik uzayına *regüler uzay* denir.

(4) X içinde her F kapalı kümesi ve $x \notin F$ için $f(x) = 0, f(F) = 1$ olacak şekilde $f: X \to [0,1]$ sürekli fonksiyonu varsa (X, τ) topolojik uzayına *tam regüler uzay* denir.

(5) Tam Regüler ve T_1 uzaya *Tychonoff uzay* denir.

(6) X içinde ayrık kapalı K ve F kümeleri için $K \subseteq U$ ve $F \subseteq V$ olacak şekilde U ve V ayrık açık kümeleri varsa (X, τ) topolojik uzayına *normal uzay* denir.

Lemma 1.1.1. Bir (X, τ) topolojik uzayının regüler olması için gerek ve yeter koşul her $U \in \tau$ ve her $x \in U$ için,

$$x \in V \subseteq \bar{V} \subseteq U$$

olacak şekilde $V \in \tau$ kümesinin var olmasıdır.

İspat: $(\Longrightarrow)$: (X, τ) regüler uzay, $U \in \tau$ ve $x \in U$ olsun. O zaman $K = X - U$ olarak alırsak $x \notin K$ ve K kapalıdır. Regülerlikten $x \in V$ ve $K \subseteq W$ olacak şekilde ayrık açık V ve W kümeleri vardır. $\bar{V} \cap K = \emptyset$ olur. Aksi halde $y \in \bar{V}$ ve $y \in K$ olacak şekilde bir $y \in X$ vardır. Bu ise $V \cap W = \emptyset$ olması ile çelişir. O zaman $\bar{V} \subseteq U$ olur.
$(\Longleftarrow)$: $x \notin F$ ve F kapalı olsun. $U = X - F$ alalım. Varsayımdan $x \in V \subseteq \bar{V} \subseteq U$ olacak şekilde V açık kümesi vardır. $W = X - \bar{V}$ seçilirse $x \in V, F \subseteq W$ ve $V \cap W = \emptyset$ olacak şekilde ayrık açık kümeler vardır. τ topolojik uzayı regülerdir.

Aşağıda normal uzayların bilinen bir karakterizasyonu ispatsız olarak verilecektir.

Lemma 1.1.2. Bir (X, τ) topolojik uzayının normal olması için gerek ve yeter koşul X içindeki her K kapalı kümesi ve her $K \subseteq U$ açık kümesi için,

$$K \subseteq V \subseteq \bar{V} \subseteq U$$

olacak şekilde V açık kümesinin olmasıdır.

Şimdi iki topolojili uzaylarda genellemesini vereceğimiz bir teoremi ve Urysohn lemmasını hatırlayalım.

Teorem 1.1.3. İkinci sayılabilir ve regüler uzay normaldir.

İspat: (X, τ) ikinci sayılabilir bir regüler uzay, B, bu uzayın sayılabilir bir bazı, H ve K, X' in ayrık kapalı kümeleri olsun. O zaman $\forall x \in H$ için $x \notin K$ olup $U \cap K = \emptyset$ olacak şekilde $x \in U \in \tau$ vardır. Regülerlikten $x \in U$ için, $x \in V \subseteq \bar{V} \subseteq U$ olacak şekilde $V \in \tau$ vardır. B, X' in bir bazı olduğundan;

$$x \in B_x \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq U$$

olacak şekilde $B_x \in B$ vardır. Bu tip kümeleri seçerek $\mathcal{U} = \{B_x : x \in H,\ B_x \in B\}$ ailesini oluşturalım. $\mathcal{U}$, H' nin sayılabilir bir örtüsüdür. Ayrıca $\forall B_x \in \mathcal{U}$ için $\overline{B_x} \cap K = \emptyset$' dir. H' nin bu örtüsü sayılabilir olduğundan $\{U_n\}$ şeklinde indekslenebilir. Benzer şekilde K' nın her bir $\overline{V_n} \cap H = \emptyset$ olacak şekilde sayılabilir $\{V_n\}$ açık örtüsünü elde ederiz.

$$U' = \bigcup U_n \text{ ve } V' = \bigcup V_n$$

olsun. O zaman $H \subseteq U'$ ve $K \subseteq V'$ dür. $n \in \mathbb{N}$ için,

$$U_n{}' = U_n - \bigcup_{i=1}^{n} \overline{V_i} \ \ ve\ V_n{}' = V_n - \bigcup_{i=1}^{n} \overline{U_i}$$

olsun. $n \in \mathbb{N}$ için $U_n{}'$ ve $V_n{}'$ açıktır. O zaman $\{U_n{}' : n \in \mathbb{N}\}$ ailesi H kümesinin, $\{V_n{}' : n \in \mathbb{N}\}$ ailesi K kümesinin açık örtüsüdür.

$$U'' = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_n{}' \ \ ve\ V'' = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} V_n{}'$$

ise $U'' \cap V'' = \emptyset$ olur. Kabul edelim ki $U'' \cap V'' \neq \emptyset$ olsun. $x \in U''$ ve $x \in V''$ olacak şekilde $\exists x \in X$ vardır. O zaman $\exists j, k \in \mathbb{N}$ için $x \in U_j' \cap V_k'$ dir. Eğer $j \le k$ ise U_j' tanımından $x \in U_j$ ve V_k' tanımından $x \notin \overline{U_j}$ olur. Bu ise bir çelişkidir. Benzer şekilde $j \ge k$ içinde görülür. $H \subseteq U''$ olduğunu gösterelim. $h \in H$ olsun. O zaman $h \in U_n$ olacak şekilde $n \in \mathbb{N}$ vardır. $\forall n \in \mathbb{N}$ için $H \cap \overline{V_n} = \emptyset$ olduğundan $h \notin \overline{V_n} \Rightarrow h \notin \overline{V_n{}'} \subseteq \overline{V_n}$ olur. O zaman $h \in U_n - \bigcup_{i=1}^{n} \overline{V_i} = U_n{}'$ olduğundan $h \in U''$ elde edilir. Benzer şekilde $K \subseteq V''$ olduğuda görülebilir.

Tanım 1.1.4. $DY = \left\{ s = \frac{k}{2^n} : k, n \in \mathbb{N}^+ \right\}$ kümesinin elemanlarına *pozitif diyadik sayı* denir.

Teorem 1.1.5. *(Urysohn Lemma)* X topolojik uzayının normal olması için gerek ve yeter koşul her ayrık $A, B \subseteq X$ kapalı kümeleri için $f(A) = \{0\}$ ve $f(B) = \{1\}$ olacak şekilde $f: X \to [0,1]$ sürekli fonksiyonunun olmasıdır.

İspat: $(\Longrightarrow)$: $A, B \subseteq X$ kapalı kümeler ve $A \cap B = \emptyset$ olsun. $U_1 = X - B$ dersek U_1 kümesi açık ve $A \subseteq U_1$ olur. Lemma 1.1.2' den;

$$A \subseteq U_0 \subseteq \overline{U_0} \subseteq U_1$$

olacak şekilde bir U_0 açık kümesi vardır. Aynı düşünceyle,

$$A \subseteq U_0 \subseteq \overline{U_0} \subseteq U_{\frac{1}{2}} \subseteq \overline{U_{\frac{1}{2}}} \subseteq U_1$$

$$A \subseteq U_0 \subseteq \overline{U_0} \subseteq U_{\frac{1}{4}} \subseteq \overline{U_{\frac{1}{4}}} \subseteq U_{\frac{1}{2}} \subseteq \overline{U_{\frac{1}{2}}} \subseteq U_{\frac{3}{4}} \subseteq \overline{U_{\frac{3}{4}}} \subseteq U_1$$

olacak şekilde $U_{\frac{1}{4}}, U_{\frac{1}{2}}, U_{\frac{3}{4}}$ açık kümeleri vardır. Bu şekilde devam edilirse,

$$A \subseteq U_0 \subseteq \overline{U_0} \subseteq \cdots \subseteq U_{s=\frac{k}{2^n}} \subseteq \overline{U_{s=\frac{k}{2^n}}} \subseteq U_1,\ n \in \mathbb{N},\ k = 1,2,\dots,2^n - 1$$

olacak şekilde $U_{s=\frac{k}{2^n}}$ açık kümeleri elde edilir. Şimdi,

$$DY = \left\{ s = \frac{k}{2^n} : n \in \mathbb{N}, k = 1,2,\dots,2^n - 1 \right\}$$

kümesini düşünelim. DY diyadik sayılar kümesi $[0,1]$ alt uzayında yoğundur. Ayrıca $r,s,t \in DY$ ve $r < s < t$ için $\overline{U_r} \subseteq U_s \subseteq \overline{U_s} \subseteq U_t$ olduğu açıktır.

Şimdi $f: X \to [0,1]$ fonksiyonunu,

$$f(x) = \begin{cases} inf\{s \in DY: x \in U_s\}, & \{s \in DY: x \in U_s\} \neq \emptyset \\ 1, & \{s \in DY: x \in U_s\} = \emptyset \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım.

Önce $f(A) = \{0\}$ olduğunu gösterelim. $x \in A$ alırsak her $s \in DY$ için $x \in U_s$ olduğundan $inf\{s \in DY: x \in U_s\} = 0$ olur. Dolayısıyla $f(A) = \{0\}$' dır.

Şimdi $f(B) = \{1\}$ olduğunu gösterelim. $x \in B$ alırsak $x \notin X - B = U_1$ olur. Buradan her $s \in DY$ için $x \notin U_s$ olduğundan $\{s \in DY: x \in U_s\} = \emptyset$ olur. Dolayısıyla $f(B) = \{1\}$ elde edilir. Her $x \in X$ için $0 \leq f(x) \leq 1$ olduğu f fonksiyonunun tanımından açıktır. Şimdi f fonksiyonunun sürekli olduğunu gösterelim. $[0,1]$ alt uzayında açık kümeler $[0,b), (a,1]$ ve (a,b) biçimindedir.

$0 < b \leq 1$ için $f^{-1}([0,b)) = \{x \in X: 0 \leq f(x) < b\}$' dir.

$$f^{-1}([0,b)) = \bigcup_{x \in f^{-1}([0,b))} \left(\bigcup_{s \in DY, x \in U_s} U_s \right)$$

yazılabilir. O zaman $f^{-1}([0,b))$ kümesi açıktır.

$0 \leq a < 1$ için $f^{-1}\big((a,1]\big) = \{x \in X: a < f(x) \leq 1\}$' dir. $x \in f^{-1}\big((a,1]\big)$ alalım. O zaman $a < r < f(x)$ olacak şekilde bir $r \in DY$ vardır. Bu durumda $U_r \subseteq \overline{U_r} \subseteq U_{f(x)}$ olur. $x \notin \overline{U_r}$' dir. Gerçekten $x \in \overline{U_r}$ olsaydı $f^{-1}\big((a,1]\big) \cap U_r \neq \emptyset$ olurdu. O zaman $\exists z \in X$ için $a < f(z) \leq 1$ ve $z \in U_r$ olurdu. Buradan $f(z) \leq r$ elde edilir. Bu ise bir çelişkidir. Şimdi $X - \overline{U_r} \subseteq f^{-1}\big((a,1]\big)$ olduğunu gösterelim. $X - \overline{U_r} \nsubseteq f^{-1}\big((a,1]\big)$ olsun. Buradan $x' \in X - \overline{U_r}$ ve $x' \notin f^{-1}\big((a,1]\big)$ olacak şekilde bir $x' \in X$ noktası vardır. $x' \notin \overline{U_r}$ olduğundan $x' \notin U_r$' dir. Ayrıca

$f(x') \notin (a,1]$ olduğundan $f(x') \leq a$ olur. Eğer $f(x') = 1$ ise $a < r < f(x') = 1$ dir. O zaman $f(x') \leq a$ olduğundan bir çelişki elde edilir. Eğer $f(x') < 1$ ise $f(x') \leq a$ ve $a < r < 1$ olduğundan $x' \in U_s$ olur ki bu $s < r$ olduğundan $x' \notin U_r$ olması ile çelişir. O halde $x \in f^{-1}\big((a,1]\big)$ için $x \in X - \overline{U_r} \subseteq f^{-1}\big((a,1]\big)$ olacak şekilde açık bir $X - \overline{U_r}$ kümesi vardır. Böylece $f^{-1}\big((a,1]\big)$ kümesi açıktır.

$0 \leq a < b \leq 1$ için $x \in f^{-1}\big((a,b)\big)$ alalım. O zaman $a < s < f(x) < r < b$ olacak şekilde $s, r \in DY$ vardır. Bu durumda;

$$\overline{U_s} \subseteq U_{f(x)} \subseteq U_r \subseteq \overline{U_r}$$

olur. $x \in U_r - \overline{U_s} \subseteq f^{-1}\big((a,b)\big)$ olacağından $f^{-1}\big((a,b)\big)$ kümesi açıktır.
Böylece f fonksiyonu süreklidir.
$(\Longleftarrow)$: $F, K \subseteq X$ kapalı kümeler ve $F \cap K = \emptyset$ olsun. Ayrıca $f(F) = \{0\}$ ve $f(K) = \{1\}$ olacak biçimde sürekli $f: X \to [0,1]$ fonksiyonu verilmiş olsun.

$$U = \left\{x \in X : f(x) < \frac{1}{2}\right\} = f^{-1}\left(\left[0, \frac{1}{2}\right)\right)$$

$$V = \left\{x \in X : f(x) > \frac{1}{2}\right\} = f^{-1}\left(\left(\frac{1}{2}, 1\right]\right)$$

açık kümelerini alalım. Bu durumda $F \subseteq U$, $K \subseteq V$ dir. Ayrıca

$$U \cap V = f^{-1}\left(\left[0, \frac{1}{2}\right)\right) \cap f^{-1}\left(\left(\frac{1}{2}, 1\right]\right) = f^{-1}\left(\left[0, \frac{1}{2}\right) \cap \left(\frac{1}{2}, 1\right]\right) = f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$$

olur. Dolayısıyla X uzayı normaldir.

2. İKİ TOPOLOJİLİ UZAYLAR

2.1. İki Topolojili Uzaylarla İlgili Genel Bilgiler

Bu bölümde iki topolojili yapı verilecektir.

Tanım 2.1.1. X, boştan farklı bir küme ve $p: X \times X \rightarrow [0,\infty)$ dönüşümü $\forall x, y, z \in X$ için,

(p1) $p(x,x) = 0$

(p2) $p(x,z) \leq p(x,y) + p(y,z)$ (Üçgen Eşitsizliği)

(p3) $p(x,y) = 0 \Rightarrow x = y$ (Ayırma)

(p4) $p(x,y) = p(y,x)$ (Simetri)

koşulları sağlanıyorsa p' ye X üzerinde bir *metrik* denir. (X,p) ikilisine de *metrik uzay* denir. Eğer p,

(p1) ve (p2) koşullarını sağlıyor ise p' ye X üzerinde *quasi-pseudo metrik* denir. (X,p) ikilisine de *quasi-pseudo metrik uzay* denir.

(p1), (p2) ve (p3) koşulları sağlanıyorsa p' ye X üzerinde *quasi-metrik* denir. (X,p) ikilisine de *quasi-metrik uzay* denir.

(p1), (p2) ve (p4) koşulları sağlanıyorsa p' ye X üzerinde *pseudo-metrik* denir. (X,p) ikilisine de *pseudo metrik uzay* denir.

Tanım 2.1.2. p, X kümesi üzerinde quasi-pseudo metrik ve $q: X \times X \rightarrow [0,\infty)$ dönüşümü $\forall x, y \in X$ için,

$$q(x,y) = p(y,x)$$

olarak tanımlansın. Bu durumda q' ya *p' nin eşleniği* adı verilir. X kümesi üzerinde (X,p,q) ile gösterilen bu uzaya da *quasi-pseudo metrik uzay* denir.

Sonuç 2.1.3. p, quasi-pseudo metrik ve q, p' nin eşleniği ise q' da quasi-pseudo metriktir.

Örnek 2.1.4. $q: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to [0,\infty)$, $p(x,y) = (y-x) \vee 0 = max\{y-x, 0\}$ quasi-pseudo metriktir.

(p1) $p(x,x) = max\{x-x, 0\} = 0$

(p2) $p(x,y) = (y-x) \vee 0$ olduğundan;

$$z - x \leq p(x,z) \text{ ve } y - z \leq p(z,y)$$

$$y - x \leq p(x,z) + p(z,y)$$

Eğer $y < x$ ise $y - x < 0$ olur. $p(x,z) + p(z,y)$, $\{y-x, 0\}$ kümesinin bir üst sınırıdır. Bu kümenin üst sınırlarının en küçüğü $p(x,y)$ olduğuna göre $p(x,y) \leq p(x,z) + p(z,y)$ olur.

Eğer $x \leq y$ ise $0 \leq y - x$ olacağından

$$p(x,y) = 0 \leq y - x \leq p(x,z) + p(z,y)$$

olur.

Tanım 2.1.5. (X,p) metrik uzay, $x \in X$ ve $r > 0$ olsun.

$$S_r(x) = \{y \in X : p(x,y) < r\}$$

kümesine x *merkezli* r *yarıçaplı açık yuvar*,

$$N_r(x) = \{y \in X : p(x,y) \leq r\}$$

kümesine *kapalı yuvar* denir. Özel olarak p metriğine göre açık yuvardan söz edildiğinde $S_r^p(x)$ yazılacaktır. p metriği ile üretilen topolojiyi τ_p ile göstereceğiz ve

$$\tau_p = \{G \subseteq X : x \in G \Rightarrow \exists r > 0 \ni S_r(x) \subseteq G\}$$

biçiminde tanımlayacağız.

Tanım 2.1.6. $G \subseteq X$ bir küme olsun. Eğer $\forall x \in G$ için $S_r(x) \subseteq G$ olacak şekilde en az bir $r > 0$ reel sayısı varsa G kümesine τ_p *topolojisine göre açıktır* veya kısaca τ_p-*açıktır* denir.

Sonuç 2.1.7. $\tau_p = \{G \subseteq X : x \in G \Rightarrow \exists r > 0 \ni S_r(x) \subseteq G\}$ ailesi X üzerinde bir topolojidir.

İspat: τ_p ailesinin topoloji olma şartlarını sağladığını gösterelim.

(t1) $x \in \emptyset \Rightarrow \exists r > 0 \ni S_r(x) \subseteq \emptyset$ önermesi doğru olduğundan $\emptyset \in \tau_p$' dir.

$\forall r > 0$ ve $\forall x \in X$ için $S_r(x) \subseteq X$ olduğundan $X \in \tau_p$' dir.

(t2) $G_1, G_2 \in \tau_p$ ve $x \in G_1 \cap G_2$ olsun. O zaman $\exists r > 0$ için $S_r(x) \subseteq G_1$ ve $\exists s > 0$ için $S_s(x) \subseteq G_2$' dir. $t = min\{r, s\}$ alalım. O zaman

$$S_t(x) \subseteq S_r(x) \cap S_s(x) \subseteq G_1 \cap G_2$$

olur. O halde $G_1 \cap G_2 \in \tau_p$ elde edilir.

(t3) $\mathcal{G} \subseteq \tau_p$ ve $x \in \bigcup \mathcal{G}$ olsun. O zaman $\exists G \in \mathcal{G}$ için $x \in G$' dir. $\mathcal{G} \subseteq \tau_p$ olduğundan $G \in \tau_p$' dir. O halde $\exists r > 0$ için $S_r(x) \subseteq G$' dir.

$$x \in S_r(x) \subseteq G \subseteq \bigcup \mathcal{G}$$

olduğundan $\bigcup \mathcal{G} \in \tau_p$ elde edilir.

Tanım 2.1.8. p ve q, X kümesi üzerinde eşlenik quasi-pseudo metrikler ve $A \subseteq X$ olsun. $y \in X$ için *y' nin p' ye göre A kümesine olan uzaklığı*,

$$p(y, A) = inf\{p(y, a): a \in A\}$$

olarak tanımlıdır. y' nin q' ya göre A kümesine olan uzaklığı da benzer şekilde tanmlanır.

Lemma 2.1.9. p ve q, X kümesi üzerinde eşlenik quasi-pseudo metrikler ve $A \subseteq X$ olsun. O halde $x, y \in X$ için $p(y, A) \leq p(y, x) + p(x, A)$ olur. p' nin q eşleniği içinde benzer eşitsizlik yazılabilir.

Teorem 2.1.10. $B = \{S_r^p(x): x \in X, r > 0\}$ ailesi X üzerinde τ_p topolojisi için bir bazdır.

Sonuç 2.1.11. (X, p, q) quasi-pseudo metrik uzay ise τ_p ile τ_q birbirinden farklı iki topoloji olur.

Örnek 2.1.12. p, Örnek 2.1.4' deki quasi pseudo metrik olsun. p ile eşleniği q' nun belirlediği topolojileri bulalım. $\varepsilon > 0$ ve $x \in \mathbb{R}$ için,

$$S_\varepsilon^p(x) = \{y \in \mathbb{R}: p(x, y) < \varepsilon\} = \{y \in \mathbb{R}: y - x < \varepsilon\} = (-\infty, x + \varepsilon)$$

elde edilir. Buradan $\{(-\infty, a): a \in \mathbb{R}\}$ ailesi p' nin ürettiği,

$$\tau_p = \{(-\infty, a): a \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\}$$

topolojisi için bir bazdır. Benzer şekilde;

$$S_\varepsilon^q(x) = \{y \in \mathbb{R}: q(x,y) < \varepsilon\} = \{y \in \mathbb{R}: x - y < \varepsilon\} = (x - \varepsilon, \infty)$$

elde edilir. Buradan $\{(b,\infty): b \in \mathbb{R}\}$ ailesi q' nun ürettiği,

$$\tau_q = \{(b,\infty): b \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\}$$

topolojisi için bir baz olur.

Tanım 2.1.13. $\tau_1 \subseteq \tau_2$ ise τ_1 topolojisine τ_2 *topolojisinden daha kabadır* ya da τ_2 topolojisi τ_1 *topolojisinden daha incedir* denir.

Tanım 2.1.14. $\mathcal{P}$ ve $\mathcal{Q}$, X üzerinde tanımlanmış keyfi iki topoloji olsun. X uzayı *iki topolojili uzay* olarak adlandırılır. $(X,\mathcal{P},\mathcal{Q})$ ile gösterilir.

Örnek 2.1.15. p, quasi-pseudo metrik ise $\{S_r(x): x \in X, r > 0\}$ ailesi X üzerindeki bir topoloji için bir bazdır. Ürettiği topoloji τ_p olsun. q, p' nin eşleniği olduğundan q, quasi-pseudo metriğinin ürettiği topoloji τ_p' den farklı bir topolojidir. Bu topoloji τ_q ise (X,τ_p,τ_q) iki topolojili uzay olur.

Sonuç 2.1.16. Her quasi-pseudo metrik iki topolojili uzay üretir.

Örnek 2.1.17. Örnek 2.1.4' deki p, quasi-pseudo metriğinin ürettiği topolojiyi s ve p' nin eşleniği q' nun ürettiği topolojiyi t ile gösterirsek bunlardan oluşan iki topolojili yapı $(\mathbb{R},s,t)$ olur.

Tanım 2.1.18. $(X,\mathcal{P},\mathcal{Q})$ iki topolojili uzayı verilsin. Eğer $\mathcal{P} = \tau_p$ ve $\mathcal{Q} = \tau_q$ (p ve q eşlenik) olacak şekilde bir p, quasi-pseudo metriği varsa $(X,\mathcal{P},\mathcal{Q})$ iki topolojili uzayına *quasi-pseudo metriklenebilirdir* denir. Quasi metriklenebilme benzer şekilde tanımlanabilir.

Örnek 2.1.19. $(\mathbb{R}, s, t)$ uzayı quasi-pseudo metriklenebilirdir. Örnek 2.1.4' deki quasi-pseudo metrik p ve eşleniği q dikkate alınırsa $s = \tau_p$ ve $t = \tau_q$ olur.

3. İKİ TOPOLOJİLİ UZAYLARDA BAZI AYIRMA AKSİYOMLARI

Bu bölümde Topolojik uzaylardaki bazı ayırma aksiyomlarının ve iyi bilinen Urysohn lemma ile Urysohn metriklenebilme teoremlerinin iki topolojili uzaylardaki genellemeleri üzerinde durulacaktır.

3.1. İki Topolojili Uzaylarda Bazı Ayırma Aksiyomları

İki topolojili uzaylarda bazı ayırma aksiyomlarının genel tanım ve özellikleri verilecektir.

Tanım 3.1.1. $(X, \mathcal{P}, \mathcal{Q})$ iki topolojili uzay olsun. $\forall x \in X$ noktasının $\mathcal{Q}$-kapalı kümelerden oluşan bir $\mathcal{P}$-komşuluk bazı varsa *$\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$' ya göre pairwise regüler* denir.

$\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$' ya göre pairwise regüler ve $\mathcal{Q}$, $\mathcal{P}$' ye göre pairwise regüler ise $(X, \mathcal{P}, \mathcal{Q})$ iki topolojili uzayına *pairwise regüler* denir.

Örnek 3.1.2. Örnek 2.1.4' deki $(\mathbb{R}, s, t)$ iki topolojili uzayı pairwise regüler uzaydır. Gerçekten $\forall x \in X$ noktası için; Örnek 2.1.12' de gösterildiği gibi,

$B_{1_x} = \{[x + \varepsilon, +\infty) : \varepsilon > 0\}$ τ_p-kapalı τ_q-komşuluklar bazı ve

$B_{2_x} = \{(-\infty, x - \varepsilon] : \varepsilon > 0\}$ ailesi de x' in τ_q-kapalı τ_p-komşuluklar bazıdır.

Önerme 3.1.3. $(X, \mathcal{P}, \mathcal{Q})$ iki topolojili uzayı verilsin. $\mathcal{P}$' nin $\mathcal{Q}$' ya göre pairwise regüler olması için gerek ve yeter koşul herhangi bir $x \in X$ için K, $\mathcal{P}$-kapalı ve $x \notin K$ olduğunda $x \in U$ ve $K \subseteq V$ olacak şekilde $U \in \mathcal{P}$ ve $V \in \mathcal{Q}$ ayrık kümelerinin var olmasıdır.

İspat: $(\Longrightarrow)$: $(X, \mathcal{P}, \mathcal{Q})$ pairwise regüler iki topolojili uzay, $x \in X$, $x \notin K$ ve K, $\mathcal{P}$-kapalı küme olsun. O zaman $(X - K) \in \mathcal{P}$ ve $x \in (X - K)$' dır. Varsayımdan

$x \in T \subseteq (X - K)$ olacak şekilde bir $\mathcal{Q}$-kapalı $\mathcal{P}$-komşuluğu T vardır. T, $\mathcal{P}$-komşuluk olduğundan,

$$x \in U \subseteq T \subseteq (X - K)$$

olacak şekilde bir $U \in \mathcal{P}$ vardır. O halde $K \subseteq (X - T)$, $x \in U$, $U \in \mathcal{P}$, $(X - T) \in \mathcal{Q}$ ve $U \cap (X - T) = \emptyset$' dir.

$(\Longleftarrow)$: $x \in X$ ve U_x kümesi x' in bir $\mathcal{P}$-komşuluğu olsun. $x \in U \subseteq U_x$ olacak şekilde $U \in \mathcal{P}$ vardır. $(X - U)$ kümesi $\mathcal{P}$-kapalıdır. O zaman $x \in G$ ve $(X - U) \subseteq H$ olacak şekilde $G \in \mathcal{P}$ ve $H \in \mathcal{Q}$ ayrık kümeleri vardır.

$$x \in G \subseteq (X - H) \subseteq U \subseteq U_x$$

olduğundan $(X - H)$ kümesi x' in $\mathcal{Q}$-kapalı $\mathcal{P}$-komşuluğudur. Dolayısıyla x noktasının $\mathcal{Q}$-kapalı kümelerden oluşan bir $\mathcal{P}$-komşuluğu vardır. O halde $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$' ya göre pairwise regülerdir.

Örnek 3.1.4. $\mathcal{P}$ ayrık olmayan topolojik uzay, $\mathcal{Q}$ ayrık topolojik uzay olmak üzere $(X, \mathcal{P}, \mathcal{Q})$ iki topolojili uzayı pairwise regülerdir. $\forall x \in X$ için $\{X\}$ ailesi x' in $\mathcal{P}$-kapalı $\mathcal{Q}$-komşuluklar bazı ve ayrıca $\mathcal{Q}$-kapalı $\mathcal{P}$-komşuluklar bazıdır.

Tanım 3.1.5. $(X, \mathcal{P}, \mathcal{Q})$ iki topolojili uzay olsun. $x \neq y$ olan $\forall x, y \in X$ için,

$$x \in U, y \notin U \; ve \; y \in V, x \notin V$$

olacak şekilde $U \in \mathcal{P}$ ve $V \in \mathcal{Q}$ kümeleri varsa $(X, \mathcal{P}, \mathcal{Q})$ iki topolojili uzayına *pairwise T_1 uzay* denir.

Örnek 3.1.6. Örnek 2.1.4' deki $(\mathbb{R}, s, t)$ iki topolojili uzayı pairwise T_1 uzaydır. $x \neq y$ olan $\forall x, y \in X$ için $x < y$ ise $x \in (-\infty, y)$, $y \notin (-\infty, y)$ ve $y \in (x, +\infty)$, $x \notin (x, +\infty)$ olacak biçimde $(-\infty, y) \in s$ ve $(x, +\infty) \in t$ kümeleri vardır. $y < x$ durumu için de benzer şekilde gösterilebilir.

Örnek 3.1.7. $\mathcal{P}$ ayrık topolojik uzay, $\mathcal{Q}$ ayrık olmayan topolojik uzay ve $|x| \geq 2$ olmak üzere $(X, \mathcal{P}, \mathcal{Q})$ iki topolojili uzayı pairwise T_1 değildir. $x, y \in X$ ve $x \neq y$ olsun. Ayrık olmayan topolojik uzay da x' i bulunduran tek açık küme X' dir ve $y \in X$ olduğundan $(X, \mathcal{P}, \mathcal{Q})$ iki topolojili uzayı pairwise T_1 değildir.

Önerme 3.1.8. $(X, \mathcal{P}, \mathcal{Q})$ iki topolojili uzayının pairwise T_1 olması için gerek ve yeter koşul $(X, \mathcal{P})$ ve $(X, \mathcal{Q})$ topolojik uzaylarının T_1 olmasıdır.

İspat: $(\Longrightarrow)$: $(X, \mathcal{P}, \mathcal{Q})$ iki topolojili uzayı pairwise T_1 olsun. O zaman $x \neq y$ olacak şekildeki $x, y \in X$ için $x \in U_1$, $y \notin U_1$ ve $x \notin V_1$, $y \in V_1$olacak şekilde $U_1 \in \mathcal{P}$ ve $V_1 \in \mathcal{Q}$ vardır. Benzer şekilde $x \notin U_2$, $y \in U_2$ ve $x \in V_2$, $y \notin V_2$ olacak şekilde $U_2 \in \mathcal{P}$ ve $V_2 \in \mathcal{Q}$ vardır. O halde,

$$x \in U_1,\ y \notin U_1 \text{ ve } x \notin U_2,\ y \in U_2$$

olacak şekilde $U_1, U_2 \in \mathcal{P}$ vardır. Dolayısıyla $(X, \mathcal{P})$ topolojik uzayı bir T_1 uzaydır. Benzer şekilde $(X, \mathcal{Q})$ topolojik uzayının da T_1 olduğu görülebilir.

$(\Longleftarrow)$: $(X, \mathcal{P})$ ve $(X, \mathcal{Q})$ topolojik uzayları T_1 olsun. O zaman $x \neq y$ olacak şekildeki $x, y \in X$ noktalarını düşünelim. O zaman $x \in U_1$, $y \notin U_1$ ve $x \notin U_2$, $y \in U_2$ olacak şekilde $U_1, U_2 \in \mathcal{P}$ vardır. Benzer şekilde $x \in V_1$, $y \notin V_1$ ve $x \notin V_2$, $y \in V_2$ olacak şekilde $V_1, V_2 \in \mathcal{Q}$ vardır. Buradan,

$$x \in U_1,\ y \notin U_1 \text{ ve } x \notin V_2,\ y \in V_2$$

olacak şekilde $U_1 \in \mathcal{P}$ ve $V_2 \in \mathcal{Q}$ elde edilir. O halde $(X, \mathcal{P}, \mathcal{Q})$ iki topolojili uzayı pairwise T_1' dir.

Tanım 3.1.9. $(X, \mathcal{P}, \mathcal{Q})$ iki topolojili uzay olsun. $x \neq y$ olan $\forall x, y \in X$ için $x \in U$ ve $y \in V$ olacak şekilde $U \in \mathcal{P}$ ve $V \in \mathcal{Q}$ ayrık kümeleri varsa $(X, \mathcal{P}, \mathcal{Q})$ iki topolojili uzayına ***pairwise Hausdorff uzay*** denir.

Örnek 3.1.10. Örnek 2.1.4' deki $(\mathbb{R}, s, t)$ iki topolojili uzayı pairwise Hausdorff uzaydır.

Örnek 3.1.11. $\mathcal{P}$ ayrık topoloji, $\mathcal{Q}$ ayrık olmayan topoloji olmak üzere $(X, \mathcal{P}, \mathcal{Q})$ iki topolojili uzayı pairwise Hausdorff değildir.

Önerme 3.1.12. $(X, \mathcal{P}, \mathcal{Q})$ pairwise Hausdorff ise $(X, \mathcal{P})$ ve $(X, \mathcal{Q})$ topolojik uzayları T_1' dir.

İspat: $(X, \mathcal{P}, \mathcal{Q})$ pairwise Hausdorff, $x \neq y$ ve $x, y \in X$ olsun. $x \in U_1$ ve $y \in V_1$ olacak şekilde $U_1 \in \mathcal{P}$ ve $V_1 \in \mathcal{Q}$ ayrık kümeleri vardır. Benzer şekilde $y \in U_2$ ve $x \in V_2$ olacak şekilde $U_2 \in \mathcal{P}$ ve $V_2 \in \mathcal{Q}$ ayrık kümeleri vardır. O halde $x \in U_1$, $y \notin U_1$ ve $x \notin U_2$, $y \in U_2$ olacak şekilde $U_1, U_2 \in \mathcal{P}$var olduğundan $(X, \mathcal{P})$ topolojik uzayı T_1' dir. Benzer şekilde $(X, \mathcal{Q})$ topolojik uzayının da T_1 olduğu gösterilebilir.

Önerme 3.1.13. Bir X kümesi üzerindeki p ve q eşlenik quasi-pseudo metriklerinin quasi metrik olması için gerek ve yeter koşul (X, τ_p, τ_q) iki topolojili uzayının pairwise Hausdorff olmasıdır.

İspat: $(\Longrightarrow)$: p ve q eşlenik quasi-pseudo metrikler, $x, y \in X$ ve $x \neq y$ olsun. O zaman $p(x, y) = \varepsilon$ olacak şekilde $\varepsilon > 0$ gerçel sayısı vardır. Buradan

$$B_p\left(x,\frac{\varepsilon}{2}\right) \in \tau_p, B_q\left(y,\frac{\varepsilon}{2}\right) \in \tau_q \ ve \ B_p\left(x,\frac{\varepsilon}{2}\right) \cap B_q\left(y,\frac{\varepsilon}{2}\right) = \emptyset$$

olur. Gerçekten $B_p\left(x,\frac{\varepsilon}{2}\right) \cap B_q\left(y,\frac{\varepsilon}{2}\right) \neq \emptyset$ olsun. O zaman $\exists z \in X$ için, $z \in B_p\left(x,\frac{\varepsilon}{2}\right) \cap B_q\left(y,\frac{\varepsilon}{2}\right)$ dir. Buradan $p(x,z) < \frac{\varepsilon}{2}$ ve $q(y,z) = p(z,y) < \frac{\varepsilon}{2}$ olduğundan $p(x,y) \leq p(x,z) + p(z,y) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ elde edilir. Bu ise $p(x,y) = \varepsilon$ olması ile çelişir.

$(\Leftarrow)$: $x, y \in X$ ve $x \neq y$ olsun. (X, τ_p, τ_q) pairwise Hausdorff olduğundan uygun bir $\varepsilon > 0$ için $y \notin B_p(x,\varepsilon)$ olur. O halde $p(x,y) \neq 0$' dır. Dolayısıyla p, quasi metriktir. Benzer şekilde q' nun da quasi metrik olduğu görülür.

$(X, \mathcal{P}, \mathcal{Q})$ iki topolojili uzayının pairwise Hausdorff olması $(X, \mathcal{P})$ ve $(X, \mathcal{Q})$ topolojik uzaylarının Hausdorff olmasını gerektirmez.

Örnek 3.1.14. $X = \mathbb{R}$, $\mathcal{P}$, ayrık topoloji ve $\mathcal{Q}$, sonlu tümleyenler topolojisi olmak üzere $(\mathbb{R}, \mathcal{P}, \mathcal{Q})$ pairwise Hausdorfftur. Gerçekten $x \neq y$, $x, y \in \mathbb{R}$ olsun. $x \in \{x\}$, $y \in (\mathbb{R} - \{x\})$, $\{x\} \in \mathcal{P}$ ve $(\mathbb{R} - \{x\}) \in \mathcal{Q}$ olup $\{x\} \cap (\mathbb{R} - \{x\}) = \emptyset$ olduğundan $(\mathbb{R}, \mathcal{P}, \mathcal{Q})$ pairwise Hausdorfftur. Ancak $(X, \mathcal{Q})$ Hausdorff değildir. $(X, \mathcal{Q})$ Hausdorff olsun. $x \neq y$, $x, y \in \mathbb{R}$ için $x \in U$ ve $y \in V$ olacak şekilde $U, V \in \mathcal{Q}$ ayrık kümeleri vardır. $U \cap V = \emptyset$ olduğundan $U \subseteq (\mathbb{R} - V)$' dir. U, sonsuz, $(\mathbb{R} - V)$ sonlu küme olduğundan çelişki elde edilir. $(\mathbb{R}, \mathcal{Q})$ Hausdorff değildir.

Tanım 3.1.15. $(X, \mathcal{P}, \mathcal{Q})$ iki topolojili uzayı verilsin. H ve K sırasıyla X' in $\mathcal{P}$-kapalı ve $\mathcal{Q}$-kapalı ayrık alt kümeleri verildiğinde $H \subseteq V$ ve $K \subseteq U$ olacak şekilde $U \in \mathcal{P}$ ve $V \in \mathcal{Q}$ ayrık kümeleri varsa $(X, \mathcal{P}, \mathcal{Q})$ iki topolojili uzayına *pairwise normal* denir.

Örnek 3.1.16. Örnek 2.1.4' deki $(\mathbb{R}, s, t)$ iki topolojili uzayı pairwise normaldir. $(\mathbb{R}, s, t)$ iki topolojili uzayında $a.b \in \mathbb{R}$ için $[a, \infty)$ kümesi s-kapalı, $(-\infty, b]$ kümesi t-kapalı ve $[a, \infty) \cap (-\infty, b] = \emptyset$ olsun. O zaman,

$$[a, \infty) \subseteq \left(\frac{a+b}{2}, \infty\right) \text{ ve } (-\infty, b] \subseteq \left(-\infty, \frac{a+b}{2}\right)$$

olacak şekilde ayrık $\left(-\infty, \frac{a+b}{2}\right) \in s$ ve $\left(\frac{a+b}{2}, \infty\right) \in t$ kümeleri vardır. O halde $(\mathbb{R}, s, t)$ iki topolojili uzayı pairwise normaldir.

Örnek 3.1.17. Bir $\emptyset \neq X$ kümesi üzerinde U ayrık topoloji ve V herhangi bir topoloji olsun. O zaman (X, U, V) pairwise normaldir. Gerçekten H, U-kapalı, K, V-kapalı ve $H \cap K = \emptyset$ ise $H \subseteq X - K$ ve $K \subseteq K$ olacak biçimde ayrık $X - K \in V$ ve $K \in U$ kümeleri vardır.

Önerme 3.1.18. $(X, \mathcal{P}, \mathcal{Q})$ iki topolojili uzayının pairwise normal olması için gerek ve yeter koşul H, $\mathcal{Q}$-kapalı, $U \in \mathcal{P}$ ve $H \subseteq U$ iken,

$$H \subseteq V \subseteq K \subseteq U$$

olacak şekilde $V \in \mathcal{P}$ ve K, $\mathcal{Q}$-kapalı kümelerinin olmasıdır.

İspat: $(\Longrightarrow)$: $(X, \mathcal{P}, \mathcal{Q})$ pairwise normal, H, $\mathcal{Q}$-kapalı, $U \in \mathcal{P}$ ve $H \subseteq U$ olsun. $(X - U)$, $\mathcal{P}$-kapalı ve $H \cap (X - U) = \emptyset$ olduğundan $H \subseteq G$, $(X - U) \subseteq V$ ve $G \cap V = \emptyset$ olacak şekilde $G \in \mathcal{P}$ ve $\mathcal{Q}$-kapalı $(X - V)$ kümesi vardır. Ayrıca $H \subseteq G \subseteq (X - V) \subseteq U$ olduğundan istenen sağlanmış olur.

$(\Longleftarrow)$: H, $\mathcal{P}$-kapalı, K, $\mathcal{Q}$-kapalı ve $H \cap K = \emptyset$ olsun. $(X - H) \in \mathcal{P}$ ve $K \subseteq (X - H)$ olduğundan ,

$$K \subseteq U \subseteq F \subseteq (X - H)$$

olacak şekilde $U \in \mathcal{P}$ ve F, $\mathcal{Q}$-kapalı kümeleri vardır. $K \subseteq U$, $H \subseteq (X - F)$, $U \in \mathcal{P}$ ve $(X - F) \in \mathcal{Q}$ olduğundan $(X, \mathcal{P}, \mathcal{Q})$ pairwise normaldir.

Tanım 3.1.19. $(X, \mathcal{P}, \mathcal{Q})$ iki topolojili uzayı ve $f: X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. Eğer $a \in \mathbb{R}$ için $f^{-1}\big((a, \infty)\big) = \{x \in X: f(x) > a\} \in \mathcal{P}$ oluyorsa f' ye *$\mathcal{P}$-alt yarı sürekli fonksiyon* denir. Eğer $a \in \mathbb{R}$ için $f^{-1}\big((-\infty, a)\big) = \{x \in X: f(x) < a\} \in \mathcal{P}$ oluyorsa f' ye *$\mathcal{P}$-üst yarı sürekli fonksiyon* denir.

Örnek 3.1.20. $(X, \mathcal{P}, \mathcal{Q})$ herhangi iki topolojili uzay ve $c \in \mathbb{R}$ olmak üzere $f(x) = c$ olsun. O zaman f fonksiyonu $\mathcal{P}$-alt yarı sürekli ve $\mathcal{P}$-üst yarı süreklidir.

Aşağıdaki teorem Urysohn lemma' nın iki topolojili uzaylardaki genellemesidir.

Teorem 3.1.21. $(X, \mathcal{P}, \mathcal{Q})$ iki topolojili uzayının pairwise normal olması için gerek ve yeter koşul H, $\mathcal{P}$-kapalı ve K, $\mathcal{Q}$-kapalı ayrık kümeleri için aşağıdaki koşulları sağlayan bir $g: X \to [0,1]$ fonksiyonunun var olmasıdır.

(a) $g(K) = \{0\}$ ve $g(H) = \{1\}$

(b) $g, \mathcal{P} - üst\ yarı\ sürekli\ ve\ \mathcal{Q} - alt\ yarı\ süreklidir.$

İspat:$(\Longrightarrow)$: Kabul edelim ki $(X, \mathcal{P}, \mathcal{Q})$ iki topolojili uzayı pairwise normal olsun. H, $\mathcal{P}$-kapalı ve K, $\mathcal{Q}$-kapalı ayrık kümeler olsunlar. $K_0 = G$ ve $G_1 = (X - H)$ olarak alalım. Bu durumda K_0, $\mathcal{Q}$-kapalı, G_1, $\mathcal{P}$-açık ve $K_0 \subseteq G_1$ olur. $(X, \mathcal{P}, \mathcal{Q})$ pairwise normal olduğundan $K_0 \subseteq G_{\frac{1}{2}} \subseteq K_{\frac{1}{2}} \subseteq G_1$ olacak şekilde $G_{\frac{1}{2}}$, $\mathcal{P}$-açık ve $K_{\frac{1}{2}}$, $\mathcal{Q}$-kapalı kümeleri vardır. $K_0, G_{\frac{1}{2}}$ ve $K_{\frac{1}{2}}, G_1$ kümelerine aynı işlem devam ettirilirse;

$$K_0 \subseteq G_{\frac{1}{4}} \subseteq K_{\frac{1}{4}} \subseteq G_{\frac{1}{2}} \subseteq K_{\frac{1}{2}} \subseteq G_{\frac{3}{4}} \subseteq K_{\frac{3}{4}} \subseteq G_1$$

olacak şekilde $G_{\frac{1}{4}}, G_{\frac{3}{4}}$, $\mathcal{P}$-açık, $K_{\frac{1}{4}}, K_{\frac{3}{4}}$, $\mathcal{Q}$-kapalı kümeleri vardır. Bu işleme devam edildiğinde $q \in \mathbb{N}^{+}$ olmak üzere;

$$p = 1,2, \dots, 2^q - 1 \; için \; (K_s)_{s=\frac{p}{2^q}}, \mathcal{Q}\text{-kapalı}$$

$$p = 1,2, \dots, 2^q - 1 \; için \; (G_s)_{s=\frac{p}{2^q}}, \mathcal{P}\text{-açık}$$

kümelerini elde ederiz. Eğer s başka bir diyadik sayı ise,

$$K_s = \begin{cases} \emptyset, & s < 0 \; ise \\ X, & s \geq 1 \; ise \end{cases} \quad \text{ve} \quad G_s = \begin{cases} \emptyset, & s \leq 0 \; ise \\ X, & s > 1 \; ise \end{cases}$$

olsun. Bu durumda $r < s < t$ için $K_r \subseteq G_s \subseteq K_s \subseteq G_t$ olur. $g: X \to [0,1]$ fonksiyonu

$$g(x) = \begin{cases} inf\{t: x \in G_t\}, & \{t: x \in G_t\} \neq \emptyset \\ 1, & diğer \; durumda \end{cases}$$

olarak tanımlansın.

(a) Eğer $x \in K = K_0$ için $g(x) = inf\{t: x \in G_t\} = 0$ olur. $x \in H$ ise $x \notin (X - H)$' dır. O zaman $\forall t$ için $x \notin G_t$' dir. $\{t: x \in G_t\} = \emptyset$ olduğundan $g(x) = 1$' dir. O halde $g(K) = \{0\}$ ve $g(H) = \{1\}$' dir.

(b)$0 < \alpha \leq 1$ için $g^{-1}([0,\alpha)) = \{x \in X: g(x) < \alpha\}$ olduğundan $t < \alpha \leq 1$ ve $x \in G_t$ olacak şekilde $\exists t$ vardır. Dolayısıyla $g^{-1}([0,\alpha)) = \bigcup_{t<\alpha} G_t \in \mathcal{P}$ olur. O halde $\mathcal{P}$-üst yarı süreklidir.

$0 < \alpha \leq b$ için $g(x) > \alpha$ olsun. $t < \alpha$ ise $x \notin G_t$' dir. O zaman $\exists r < t$ için $x \notin K_r$' dir. $x \in (X - K_r)$ olduğundan $x \in (X - K_r) \subseteq g^{-1}((\alpha, 1])$ olur. Bu nedenle $g^{-1}((\alpha, 1] \in \mathcal{Q}$' dur. O halde g, $\mathcal{Q}$-alt yarı süreklidir.

(⟸): $H \cap K = \emptyset$ olacak şekilde H, $\mathcal{P}$-kapalı, K, $\mathcal{Q}$-kapalı kümeler olsunlar. $g(K) = \{0\}$ ve $g(H) = \{1\}$ olacak şekilde $\mathcal{P}$-üst yarı sürekli, $\mathcal{Q}$-alt yarı sürekli $g: X \to [0,1]$ fonksiyonunu alalım. g, $\mathcal{P}$-üst yarı sürekli olduğundan $U = g^{-1}\left(\left[0, \frac{1}{2}\right)\right) = \left\{x \in X : g(x) < \frac{1}{2}\right\} \in \mathcal{P}$' dir ve $K \subseteq U$ olur. g, $\mathcal{Q}$-alt yarı sürekli olduğundan $V = g^{-1}\left(\left(\frac{1}{2}, 1\right]\right) = \left\{x \in X : g(x) > \frac{1}{2}\right\} \in \mathcal{Q}$' dur ve $H \subseteq V$ olur. Ayrıca $U \cap V = \emptyset$ olduğundan $(X, \mathcal{P}, \mathcal{Q})$ iki topolojili uzayı pairwise normaldir.

Tanım 3.1.22. $(X, \mathcal{P}, \mathcal{Q})$ iki topolojili uzay olsun. Eğer $\mathcal{P}$ ve $\mathcal{Q}$' nun sayılabilir birer bazı varsa $(X, \mathcal{P}, \mathcal{Q})$ iki topolojili uzayına *ikinci sayılabilir* denir.

Lemma 3.1.23. İkinci sayılabilir ve pairwise regüler bir iki topolojili uzay pairwise normaldir.

İspat: $(X, \mathcal{P}, \mathcal{Q})$ iki topolojili uzayı ikinci sayılabilir ve pairwise regüler olsun. O zaman $\mathcal{P}$ ve $\mathcal{Q}$' nun her ikisininde sayılabilir bazları vardır.

$$B_{\mathcal{P}} = \{P_n : n \in \mathbb{N}\} \text{ ve } B_{\mathcal{Q}} = \{Q_n : n \in \mathbb{N}\}$$

sırasıyla $\mathcal{P}$ ve $\mathcal{Q}$ için sayılabilir bazlar olsunlar. F, $\mathcal{P}$-kapalı, K, $\mathcal{Q}$-kapalı ve $F \cap K = \emptyset$ olsun. $(X, \mathcal{P}, \mathcal{Q})$ pairwise regüler olduğundan $x \in F$ ise,

$$x \in \mathcal{Q}_n^x \subseteq cl_{\mathcal{P}}(\mathcal{Q}_n^x) \subseteq (X - K)$$

olacak şekilde $\mathcal{Q}_n^x \in B_{\mathcal{Q}}$ kümesi vardır. Aynı şekilde $y \in K$ ise,

$$y \in \mathcal{P}_n^y \subseteq cl_{\mathcal{Q}}(\mathcal{P}_n^y) \subseteq (X - F)$$

olacak şekilde $\mathcal{P}_n^y \in B_{\mathcal{P}}$ kümesi vardır.
$y \in \mathcal{P}_n^y$ ise $y \notin X - \mathcal{P}_n^y$ olup,

$$\mathcal{P}_m^y \subseteq cl_{\mathcal{Q}}(\mathcal{P}_m^y) \subseteq \mathcal{P}_n^y$$

olacak şekilde $\mathcal{P}_m^y \in B_{\mathcal{P}}$ kümesi vardır. Benzer şekilde,

$$\mathcal{Q}_m^x \subseteq cl_{\mathcal{P}}(\mathcal{Q}_m^x) \subseteq \mathcal{Q}_n^x$$

olacak şekilde $\mathcal{Q}_m^x \in B_{\mathcal{Q}}$ kümesi vardır.
Böyle devam edilirse $\mathcal{G} = \{\mathcal{P}_n^y : y \in K\}$ ailesi ile K' nın bir $\mathcal{P}$-açık örtüsü ve $\mathcal{H} = \{\mathcal{Q}_n^x : x \in F\}$ ailesi ile F' nin bir $\mathcal{Q}$-açık örtüsü elde edilmiş olur. $\mathcal{G} \subseteq B_{\mathcal{P}}$ ve $\mathcal{H} \subseteq B_{\mathcal{Q}}$ olduğundan $\mathcal{G}$ ve $\mathcal{H}$ ailesi sayılabilirdir. Bu örtüler için yeni bir indeksleme yapılırsa, $\{\mathcal{P}_m : m \in \mathbb{N}\}$, K' yı örten ve $\mathcal{G}$' nin elemanlarından oluşan sayılabilir bir aile ve $\{\mathcal{Q}_m : m \in \mathbb{N}\}$, F' yi örten ve $\mathcal{H}$' nin elemanlarından oluşan sayılabilir bir aile olur.

$$\mathcal{Q}_m^* = \left(\mathcal{Q}_m - \cup_{k \le m}(cl_{\mathcal{Q}}(\mathcal{P}_k))\right) \text{ ve } \mathcal{P}_m^* = (\mathcal{P}_m - \cup_{k \le m}(cl_{\mathcal{P}}(\mathcal{Q}_k)))$$

olarak tanımlansın.

$$U = \cup_{m \in \mathbb{N}} \mathcal{P}_m^* \text{ ve } V = \cup_{m \in \mathbb{N}} \mathcal{Q}_m^*$$

olsun. $U \cap V = \emptyset$' dir. Bunu kanıtlamak için $U \cap V \neq \emptyset$ olduğunu varsayalım. O zaman $\exists z \in X$ için $z \in U$ ve $z \in V$ olur. U ve V' nin tanımından $\exists m_0 \in \mathbb{N}$; $z \in \mathcal{P}_{m_0}^*$ ve $\exists n_0 \in \mathbb{N}$; $z \in \mathcal{Q}_{n_0}^*$' dır. $\mathcal{P}_{m_0}^*$ ve $\mathcal{Q}_{n_0}^*$ tanımından $z \in \mathcal{P}_{m_0}$, $z \notin \cup_{k \le m_0} cl_{\mathcal{P}}(\mathcal{Q}_k)$ ve $z \in \mathcal{Q}_{n_0}$, $z \notin \cup_{k \le n_0} cl_{\mathcal{Q}}(\mathcal{P}_k)$ olur. Buradan $\forall k \le m_0$ için

$z \notin cl_{\mathcal{P}}(\mathcal{Q}_k)$, $\forall k \leq n_0$ için $z \notin cl_{\mathcal{Q}}(\mathcal{P}_k)$ elde edilir. Eğer $m_0 < n_0$ ise $z \notin cl_{\mathcal{Q}}(P_{m_0})$ olur ki $z \in \mathcal{P}_{m_0}$ olması ile çelişir. Eğer $n_0 \leq m_0$ ise $z \notin cl_{\mathcal{P}}(\mathcal{Q}_{n_0})$ olur ki $z \in \mathcal{Q}_{n_0}$ olması ile çelişir. O zaman $U \cap V = \emptyset$' dir. Şimdi $F \subseteq V$ olduğunu gösterelim. $x \in F$ ise $x \in \mathcal{Q}_m$ olacak şekilde $m \in \mathbb{N}$ vardır. $k \leq m$ için $cl_{\mathcal{Q}}(P_k) \subseteq (X - F)$ olduğundan $x \notin cl_{\mathcal{Q}}(P_k)$ olur. O halde $x \in V$ olur. Benzer şekilde $K \subseteq U$ olduğu görülür.

Teorem 3.1.24. $(X, \mathcal{P}, \mathcal{Q})$ iki topolojili uzayı ikinci sayılabilir ve pairwise regüler ise quasi pseudo metriklenebilirdir.

İspat: $(X, \mathcal{P}, \mathcal{Q})$ iki topolojili uzayı ikinci sayılabilir ise $\mathcal{P}$ ve $\mathcal{Q}$' nun sayılabilir bazları vardır.

$$B_{\mathcal{P}} = \{P_n : n \in \mathbb{N}\} \text{ ve } B_{\mathcal{Q}} = \{Q_n : n \in \mathbb{N}\}$$

sırasıyla $\mathcal{P}$ ve $\mathcal{Q}$ için sayılabilir bazlar olsunlar. $(X, \mathcal{P}, \mathcal{Q})$ pairwise regüler ve $B_{\mathcal{P}}$, $\mathcal{P}$ için baz olduğundan her bir P_n ve $\forall x \in P_n$ için,

$$x \in P_m \subseteq cl_{\mathcal{Q}}(P_m) \subseteq P_n$$

olacak şekilde bir $P_m \in B_{\mathcal{P}}$ kümesi vardır. $B_{\mathcal{P}}$ sayılabilir bazının (P_m, P_n) şeklinde oluşturulan sıralı çiftlerinin $cl_{\mathcal{Q}}(P_m) \subseteq P_n$ koşulunu sağlayanları yeniden $\{(P_{m_k}, P_{n_k})\}_{k \in \mathbb{N}}$ şeklinde indeksleyelim. $k = 1,2, \ldots$ için $S_k = P_{m_k}$, $T_k = P_{n_k}$ olsun. Lemma 3.1.23' ten $(X, \mathcal{P}, \mathcal{Q})$ iki topolojili uzayı pairwise normaldir. Teorem 3.1.21' den $\forall k \in \mathbb{N}$ için,

$$g_k\left(cl_{\mathcal{Q}}(S_k)\right) = \{0\} \text{ ve } g_k(X - T_k) = \{1\}$$

olacak şekilde $\mathcal{P}$-üst yarı sürekli, $\mathcal{Q}$-alt yarı sürekli $g_k : X \to [0,1]$ fonksiyonu vardır. $x, y \in X$ için,

$$\{g_k(y) - g_k(x)\}^+ = max\{0, g_k(y) - g_k(x)\}$$

olmak üzere;

$$h_x^{p_1}(y) = p_1(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k \{g_k(y) - g_k(x)\}^+$$

fonksiyonunu tanımlayalım. $h_x^{p_1} = p_1$ bir quasi-pseudo metriktir.

(p1) $\forall x \in X$ için $\{g_k(y) - g_k(x)\}^+ = \{0\}$ olduğundan $p_1(x,x) = 0$ olur.

(p2) $x, y, z \in X$ için,

$$g_k(z) - g_k(x) \leq \{g_k(z) - g_k(x)\}^+ \text{ ve } g_k(y) - g_k(z) \leq \{g_k(y) - g_k(z)\}^+$$

eşitsizliklerini taraf tarafa toplarsak;

$$g_k(y) - g_k(x) \leq \{g_k(y) - g_k(z)\}^+ + \{g_k(z) - g_k(x)\}^+$$

elde edilir. $\{g_k(y) - g_k(x)\}^+ = max\{0, g_k(y) - g_k(x)\}$ olduğundan;

$$\{g_k(y) - g_k(x)\}^+ \leq \{g_k(y) - g_k(z)\}^+ + \{g_k(z) - g_k(x)\}^+$$

olur. Buradan $p_1(x,y) \leq p_1(x,z) + p_1(z,y)$ elde edilir.

Önce sabit bir $x \in X$ için $h_x^{p_1}(y)$ fonksiyonunun y' ye göre $\mathcal{P}$-üst yarı sürekli olduğunu kanıtlayalım. Bunun için $0 < a \leq 1$ olmak üzere $\left(h_x^{p_1}\right)^{-1}([0,a)) \in \mathcal{P}$ olduğunu göstermek yeterlidir. $y \in \left(h_x^{p_1}\right)^{-1}([0,a))$ alalım. O zaman $g_k(y) = 0$ olacak biçimde bir $\mathcal{P}$-üst yarı sürekli ve $\mathcal{Q}$-alt yarı sürekli $g_k : X \to [0,1]$ fonksiyonunun olduğunu biliyoruz. O zaman $y \in g_k^{-1}([0,a))$' dır. Ayrıca,

$$g_k^{-1}([0,a)) \subseteq \left(h_x^{p_1}\right)^{-1}([0,a))$$

olur. g_k, $\mathcal{P}$-üst yarı sürekli olduğundan, $g_k^{-1}([0,a)) \in \mathcal{P}$' dir. Buradan y, $\left(h_x^{p_1}\right)^{-1}([0,a))$ kümesi için $\mathcal{P}$' ye göre bir iç noktası olur. O zaman $\left(h_x^{p_1}\right)^{-1}([0,a)) \in \mathcal{P}$' dir. O halde $h_x^{p_1}$ fonksiyonu $\mathcal{P}$-üst yarı süreklidir. Şimdi de sabit bir $x \in X$ için $h_x^{p_1}$ fonksiyonunun y' ye göre $\mathcal{Q}$-alt yarı sürekli olduğunu gösterelim.$0 \leq a < 1$ olmak üzere $y \in \left(h_x^{p_1}\right)^{-1}\left((a,1]\right)$ alalım. O zaman $g_k(y) = 1$ olacak biçimde $\mathcal{P}$-üst yarı sürekli ve $\mathcal{Q}$-alt yarı sürekli $g_k: X \to [0,1]$ fonksiyonu bulunabilir. $a \leq b$ ve $g_k(x) + b < 1$ olacak biçimde bir $b \in \mathbb{R}$ sayısı seçelim. Bu durumda,

$$y \in g_k^{-1}(g_k(x) + b, 1]) \subseteq \left(h_x^{p_1}\right)^{-1}\left((a,1]\right)$$

elde edilir. O zaman $\left(h_x^{p_1}\right)^{-1}\left((a,1]\right) \in \mathcal{Q}$' dur. O halde $h_x^{p_1}$ fonksiyonu $\mathcal{Q}$-alt yarı süreklidir. $x, y \in X$ için,

$$h_x^{q_1}(y) = q_1(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k \{g_k(x) - g_k(y)\}^+$$

fonksiyonunu tanımlayalım. q_1, p_1 quasi-pseudo metriğinin eşleniğidir. $h_x^{q_1}$ fonksiyonunun $\mathcal{Q}$-üst yarı sürekli ve $\mathcal{P}$-alt yarı sürekli olduğu $h_x^{p_1}$ fonksiyonuna benzer olarak gösterilebilir. quasi-pseudo metrik p_1 ile q_1' in ürettiği topolojiler sırasıyla τ_{p_1} ve τ_{q_1} olsun. O zaman $\mathcal{P} = \tau_{p_1}$ ve $\tau_{q_1} \subseteq \mathcal{Q}$ olur. $h_x^{p_1}$ fonksiyonu y' ye göre $\mathcal{P}$-üst yarı sürekli olduğundan;

$$S_a^{p_1}(x) = \{y \in X: p_1(x,y) < a\} = \left(h_x^{p_1}\right)^{-1}([0,a)) \in \mathcal{P}$$

olur. Böylece $\tau_{p_1} \subseteq \mathcal{P}$ elde edilir. Tersine $G \in \mathcal{P}$ ve $x \in G$ ise,

$$x \in P_{m_k} \subseteq cl_{\mathcal{Q}}(P_{m_k}) \subseteq P_{n_k}$$

olacak biçimde bir $k \in \mathbb{N}^+$ sayısının bulunabildiğini biliyoruz. Ayrıca $S_k = P_{m_k}$ ve $T_k = P_{n_k}$ ise,

$$g_k\left(cl_{\mathcal{Q}}(S_k)\right) = \{0\} \text{ ve } g_k(X - T_k) = \{1\}$$

olacak biçimde $\mathcal{P}$-üst yarı sürekli ve $\mathcal{Q}$-alt yarı sürekli fonksiyonu g_k vardır. Söz konusu $k \in \mathbb{N}^+$ için,

$$S^{p_1}_{\left(\frac{1}{2}\right)^k}(x) \subseteq G$$

olur. Gerçekten $y \in S^{p_1}_{\left(\frac{1}{2}\right)^k}(x)$ ise,

$$\left(\tfrac{1}{2}\right)^k \{g_k(y) - g_k(x)\}^+ \leq p_1(x,y) < \left(\tfrac{1}{2}\right)^k \text{ ve } \{g_k(y) - g_k(x)\}^+ < 1$$

dir. $x \in \mathcal{Q} - cl(S_k)$ olduğundan $g_k(x) = 0$' dır. O zaman $g_k(y) \neq 1$' dir. Buradan $y \in T_k \subseteq G$ elde edilir. O halde $G \in \tau_{p_1}$ olur. $\forall \varepsilon > 0$ için $S^{q_1}_{\varepsilon}(x) \in \tau_{q_1}$ olduğundan $\tau_{q_1} \subseteq \mathcal{Q}$ elde edilir.

Şimdi $\mathcal{Q}$' nun $B_{\mathcal{Q}} = \{Q_n : n \in \mathbb{N}\}$ bazına aynı metod uygulanırsa $(X, \mathcal{P}, \mathcal{Q})$ pairwise regüler ve $B_{\mathcal{Q}}$, $\mathcal{Q}$ için baz olduğundan $\forall Q_n \in B_{\mathcal{Q}}$ ve $\forall x \in Q_n$ için,

$$x \in Q_m \subseteq cl_{\mathcal{P}}(Q_m) \subseteq Q_n \subseteq G$$

olacak şekilde $Q_m \in B_Q$ kümesi vardır. $cl_{\mathcal{P}}(Q_m) \subseteq Q_n$ koşulunu sağlayan $\{(Q_{m_k}, Q_{n_k})\}_{k\in\mathbb{N}}$ ailesi tekrardan $k \in \mathbb{N}$ için $R_k = Q_{m_k}$, $F_k = Q_{n_k}$ olacak biçimde indekslenirse $f_k(cl_{\mathcal{P}}(R_k)) = 1$, $f_k(X - F_k) = 0$ olacak biçimde f_k, $\mathcal{P}$-alt yarı sürekli, $\mathcal{Q}$-üst yarı sürekli $f_k: X \to [0,1]$ fonksiyonu bulunabilir.

$x, y \in X$ için $\{f_k(y) - f_k(x)\}^+ = \max_{x,y\in X}\{0, \{f_k(y) - f_k(x)\}\}$ olmak üzere;

$$h_x^{p_2}(y) = p_2(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k \{f_k(y) - f_k(x)\}^+$$

fonksiyonunu tanımlayalım.

Sabit bir $x \in X$ için $h_x^{p_2}(y)$ fonksiyonu y' ye göre $\mathcal{P}$-alt yarı sürekli ve $\mathcal{Q}$-üst yarı süreklidir. q_2, p_2' nin eşleniği olarak tanımlanırsa $\mathcal{Q} = \tau_{q_2}$ ve $\tau_{p_2} \subseteq \mathcal{Q}$ olduğu benzer şekilde gösterilebilir.

$\forall x, y \in X$ için $p_3(x,y) = p_1(x,y) + p_2(x,y)$ ve $q_3(x,y) = q_1(x,y) + q_2(x,y)$ olsun. p_3, quasi-pseudo metriktir ve q_3, p_3' ün eşleniğidir.

$$\tau_{p_3} = \tau_{p_1} \vee \tau_{p_2}$$

olduğunu gösterelim. $\tau_{p_1} \vee \tau_{p_2}$, bazı $\{U_1 \cap U_2 : U_1 \in \tau_{p_1}, U_2 \in \tau_{p_2}\}$ olan topolojidir. Ayrıca $\tau_{p_1} \subseteq \tau_{p_3}$ ve $\tau_{p_2} \subseteq \tau_{p_3}$ olur.

$G \in \tau_{p_3}$ ve $x \in G$ olsun. $\exists \varepsilon > 0; X \in S_\varepsilon^{p_3}(x) \subseteq G \Rightarrow S_{\frac{\varepsilon}{2}}^{p_1}(x) \cap S_{\frac{\varepsilon}{2}}^{p_2}(x) \subseteq S_\varepsilon^{p_3}(x)$ ve $S_{\frac{\varepsilon}{2}}^{p_1}(x) \cap S_{\frac{\varepsilon}{2}}^{p_2}(x) \in \tau_{p_1} \vee \tau_{p_2}$ olduğundan $G \in \tau_{p_1} \vee \tau_{p_2}$ olur. Tersine $G \in \tau_{p_1} \vee \tau_{p_2}$ ve $x \in G$ ise $x \in U_1 \cap U_2 \subseteq G$ olacak şekilde $U_1 \in \tau_{p_1}$ ve $U_2 \in \tau_{p_2}$ vardır. O zaman $\exists \varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0; x \in S_{\varepsilon_1}^{p_1}(x) \subseteq U_1$ ve $x \in S_{\varepsilon_2}^{p_2}(x) \subseteq U_2$' dir. $\lambda = min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ alınırsa $S_\lambda^{p_3}(x) \subseteq S_{\varepsilon_1}^{p_1}(x) \cap S_{\varepsilon_2}^{p_2}(x) \subseteq U_1 \cap U_2 \subseteq G$ elde edilir.

$\mathcal{P} = \tau_{p_3}$ olduğunu gösterelim. $p_3 = p_1 + p_2$ olduğundan $\tau_{p_3} = \tau_{p_1} \vee \tau_{p_2}$ olur. $\tau_{p_2} \subseteq \mathcal{P}$ ve $\mathcal{P} = \tau_{p_1}$ olduğundan $\tau_{p_3} = \tau_{p_1} = \mathcal{P}$ olur.
$\mathcal{Q} = \tau_{q_3}$ olduğunu gösterelim. $q_3 = q_1 + q_2$ iken $\tau_{q_3} = \tau_{q_1} \vee \tau_{q_2}$ olur. $\tau_{q_1} \subseteq \mathcal{Q}$ ve $\mathcal{Q} = \tau_{q_2}$ olduğundan $\tau_{q_3} = \tau_{q_2} = \mathcal{Q}$ elde edilir.

Önerme 3.1.25. (X, p, q) bir quasi-pseudo metrik uzay olsun. $\forall x \in X$ ve $k > 0$ için $\{y \in X : p(x,y) < k\}$ ve $\{x \in X : p(x,y) > k\}$, τ_p-açık, $\{x \in X : p(x,y) < k\}$, τ_q-açık ve $\{y \in X : p(x,y) \leq k\}$, τ_q-kapalı kümelerdir.

İspat: $G = \{y \in X : p(x,y) < k\}$ olsun. $y \in G$ için $r = k - p(x,y) > 0$ olacak şekilde $r > 0$ sayısını seçelim. O zaman $S_r^p(y) \subseteq G$' dir. $z \in S_r^p(y)$ olsun. O halde $p(y,z) < r$' dir. $p(x,z) \leq p(x,y) + p(y,z) < p(x,y) + k - p(x,y) = k \Rightarrow z \in G$' dir.
$H = \{y \in X : p(x,y) \leq k\}$ olsun. $y \in (X - H)$ olsun. $r = p(x,y) - k > 0$ olacak şekilde $r > 0$ sayısını seçelim. O zaman $S_r^q(y) \subseteq (X - H)$' dir. $z \in S_r^q(y)$ olsun. O zaman $q(y,z) = p(z,y) < r$' dir.
$p(x,y) \leq p(x,z) + p(z,y) < p(x,z) + p(x,y) - k$ olduğunda $k < p(x,z)$ elde edilir. O halde $z \in (X - H)$ olur. Böylece $(X - H)$, τ_q-açık olduğundan H, τ_q-kapalı olur.
$F = \{x \in X : p(x,y) > k\}$ olsun. $x \in F$ için $r = p(x,y) - k > 0$ olacak şekilde $r > 0$ sayısını seçelim. $z \in S_r^p(x)$ ise $p(x,z) < r$' dir.

$$p(x,y) \leq p(x,z) + p(z,y) < p(x,y) - k + p(z,y) \Rightarrow k < p(z,y) \Rightarrow z \in F$$

O halde $\forall x \in F$ için $B_p(x,r) \subseteq F$ olduğundan F, τ_p-açıktır.
$K = \{x \in X : p(x,y) < k\}$ olsun. $x \in K$ için $r = k - p(x,y) > 0$ olacak şekilde $r > 0$ sayısını seçelim. $z \in B_q(x,r)$ ise $q(x,z) = p(z,x) < r$' dir.

$$p(z,y) \leq p(z,x) + p(x,y) < k - p(x,y) + p(x,y) \Rightarrow p(z,y) < k$$

olduğundan $z \in K$ elde edilir. O halde $\forall x \in K$ için $S_r^q(x) \subseteq K$ olduğundan K, τ_q-açıktır.

Önerme 3.1.26. (X, τ_p, τ_q), X üzerinde p ve q eşlenik quasi-pseudo metriklerle oluşturulan iki topolojili uzay olsun. Bu durumda;

(i) Sabit bir $x_0 \in X$ noktası için $p_{x_0} = p(x_0, y)$ fonksiyonu y' ye göre τ_p-üst yarı sürekli, τ_q-alt yarı süreklidir.

(ii) Sabit bir $y_0 \in X$ noktası için $q_{x_0} = p(x, y_0)$ fonksiyonu x' e göre τ_p-alt yarı sürekli, τ_q-üst yarı süreklidir.

İspat: (i) $\{y \in X : p_{x_0}(y) < k\} = \{y \in X : p(x_0, y) < k\} \in \tau_p$ olduğundan p_{x_0}, τ_p-üst yarı süreklidir.

$\{y \in X : p_{x_0}(y) > k\} = X - \{y \in X : p_{x_0}(y) \leq k\} = X - \{y \in X : p(x_0, y) \leq k\} \in \tau_q$ olduğundan p_{x_0}, τ_q-alt yarı süreklidir.

(ii) $\{x \in X : q_{y_0}(x) < k\} = \{x \in X : q(x, y_0) < k\} \in \tau_q$ olduğundan q_{y_0}, τ_q-üst yarı süreklidir.

$\{x \in X : q_{y_0}(x) > k\} = \{x \in X : q(x, y_0) > k\} \in \tau_p$ olduğundan q_{y_0}, τ_p-alt yarı süreklidir.

Önerme 3.1.27. τ_p ve τ_q sırasıyla p ve q eşlenik quasi-pseudo metrikleri ile oluşturulan quasi-pseudo metrik topolojileri olsun.

(i) (X, τ_p, τ_q) pairwise regülerdir.

(ii) (X, τ_p, τ_q) pairwise normaldir.

İspat: **(i)** $x \in X$ ve G, x' in τ_p-komşuluğu olsun. O zaman $\exists r > 0$ için,

$$x \in S_r^p(x) \subseteq G$$

dir. $k < r$ olacak şekilde $k > 0$ seçilirse $x \in S_k^p(x) \subseteq S_r^p(x) \subseteq G$ olur. $H = \{y \in X: p(x,y) \leq k\}$, τ_q-kapalı ve $x \in S_k^p(x) \subseteq H \subseteq S_r^p(x) \subseteq G$ olduğundan x' in her τ_p-komşuluğunun τ_q-kapalı bir komşuluklar bazı vardır. O halde τ_p, τ_q' ya göre pairwise regülerdir. Benzer şekilde τ_q' nun da τ_p' ye göre pairwise regüler olduğu görülür. (X, τ_p, τ_q) pairwise regülerdir.

(ii) $F, H \subseteq X$, $F \cap H = \emptyset$, F, τ_p-kapalı ve H, τ_q-kapalı kümeler olsunlar. Bu durumda,

$$x \in F \Leftrightarrow p(x,F) = 0 \text{ ve } x \in H \Leftrightarrow q(x,H) = 0$$

olduğunu biliyoruz. O zaman $F = \{y \in X: p(y,F) = 0\}$ ve $H = \{y \in X: q(y,H) = 0\}$' dır. $U = \{x \in X: p(x,F) < q(x,H)\}$ ve $V = \{x \in X: q(x,H) < p(x,F)\}$ olsun. O zaman $F \subseteq U$ ve $H \subseteq V$' dir. Ayrıca $U \cap V = \emptyset$' dır. $U \cap V \neq \emptyset$ olsun. $\exists x \in U \cap V$ için $x \in U$ ve $x \in V$ olur. O halde $p(x,F) < q(x,H)$ ve $q(x,H) < p(x,F)$ olur ki bu bir çelişkidir. Şimdi $U \in \tau_q$ olduğunu görelim. $y \in U$ olsun. O zaman $p(y,F) < q(y,H)$ olur. $\varepsilon = q(y,H) - p(y,F) > 0$ olacak şekilde $\varepsilon > 0$ seçilirse $S_{\frac{\varepsilon}{2}}^q(y) \subseteq U$' dur. Gerçekten; $z \in S_{\frac{\varepsilon}{2}}^q(y)$ ise $q(y,z) < \frac{\varepsilon}{2}$ dir. Lemma 2.1.9' dan dolayı,

$$p(z,F) \leq p(z,y) + p(y,F) = q(y,z) + p(y,F)$$

olduğundan,

$$-p(z,F) \geq -q(y,z) - p(y,F) \qquad (1)$$

olur. Diğer taraftan $q(y,H) \leq q(y,z) + q(z,H)$ ve dolayısıyla;

$$q(y,H) - q(y,z) \leq q(z,H) \qquad (2)$$

elde edilir. (1) ve (2)' den;

$$q(z,H) - p(z,F) \geq q(y,H) - p(y,F) - 2q(y,z) > \varepsilon - 2\frac{\varepsilon}{2} = 0$$

dır. O zaman $z \in U$ ve $U \in \tau_q$ olur. $V \in \tau_p$ olduğuda benzer yolla görülebilir.

3.2. Pairwise Hausdorff Uzaylar

Bölüm3.1' de pairwise Hausdorff uzayın tanımı ve bazı özellikleri verilmiştir. Bu bölümde ise (X, τ_1, τ_2) iki topolojili uzayı üzerinde pairwise weakly Hausdorff koşullarının bir (X, τ_1^*, τ_2^*) iki topolojili uzayında pairwise Hausdorff koşullarına geçişini inceleyeceğiz.

Tanım 3.2.1. X üzerindeki bir τ topolojisinde x' i içeren her $G \in \tau$ açık kümesi için $\forall \sigma \geq \sigma_0, x_\sigma \in G$ olacak şekilde bir $\sigma_0 \in \Sigma$ varsa $x \in X$ noktası, X üzerinde bir $\{x_\sigma : \sigma \in \Sigma\}$ ağının τ *limit noktası* olarak adlandırılır.

Şimdi pairwise weakly Hausdorff kavramını tanımlayacağız.
Burada $cl_\tau(A)$, A' nın bir τ topolojisine göre kapanışını belirtir. Özellikle $cl_\tau(\{x\})$ yerine $cl_\tau(x)$ yazarız.

Tanım 3.2.2. (X, τ_1, τ_2) iki topolojili uzay olsun. Eğer X üzerindeki bir $\{x_\sigma : \sigma \in \Sigma\}$ ağı için $x \in lim_{\tau_1} x_\sigma$ ve $y \in lim_{\tau_2} x_\sigma$ olduğunda $cl_{\tau_1}(x) = cl_{\tau_2}(y)$ oluyorsa (X, τ_1, τ_2) iki topolojili uzayına *pairwise weakly Hausdorff* denir.

Bir uzayın pairwise weakly Hausdorff uzay olması pairwise Hausdorff olmasına yetmeyebilir örnekle gösterelim.

Örnek 3.2.3. $X = \{a, b, c\}$ ve $\tau = \tau_1 = \tau_2 = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b, c\}\}$ olsun. (X, τ_1, τ_2) iki topolojili uzayı pairwise weakly Hausdorff fakat pairwise Hausdorff değildir.
Şimdi $a, b \in lim_{\tau_1} x_\sigma = lim_{\tau_2} x_\sigma$ olsun.

$$a \in lim x_\sigma \Leftrightarrow a \in U = \{a\} \in \tau, \exists \sigma_0 \in \Sigma \ni \sigma \geq \sigma_0 \; için \; x_\sigma \in U = \{a\}$$

$$b \in \lim x_\sigma \Leftrightarrow b \in V = \{b, c\} \in \tau, \exists \sigma_1 \in \Sigma \ni \sigma \geq \sigma_1 \; için \; x_\sigma \in V = \{b, c\}$$

Σ yönlendirilmiş olduğundan $\exists \sigma_2 \in \Sigma \ni \sigma_2 > \sigma_0 \; ve \; \sigma_2 > \sigma_1$ vardır.
$\Rightarrow \sigma > \sigma_2 \; için \; x_\sigma \in U \cap V = \emptyset$. Dolayısıyla $a, b \in lim_\tau x_\sigma$ olacak şekilde X' de $\{x_\sigma : \sigma \in \Sigma\}$ ağı yoktur.

$$b, c \in lim x_\sigma \Rightarrow cl\{b\} = cl\{c\}$$

dir. Böylece (X, τ_1, τ_2) iki topolojili uzayı pairwise weakly Hausdorfftur. Pairwise Hausdorff olmadığını gösterelim.
$b, c \in X \; için \; b \in U \in \tau_1, c \in V \in \tau_2$ alındığında $U = X$ veya $U = \{b, c\}$ ve $V = X$ veya $V = \{b, c\}$ olmak zorunda olup $U \cap V \neq \emptyset$ olur. Dolayısıyla (X, τ_1, τ_2) iki topolojili uzayı pairwise Hausdorff değildir.

Tanım 3.2.4. (X, τ) topolojik uzay ve $A \subseteq X$ olsun. $A \subseteq G$ olacak şekildeki her $G \in \tau$ için $cl_\tau(A) \subseteq G$ oluyorsa A' ya *g-kapalı* denir.
$\mathfrak{D} = \{A \subseteq X : A \; g - kapalı\}$ olsun. Herhangi bir $E \subset X$ için;

$$Cl^*(E) = \cap \{A \in \mathfrak{D} : E \subset A\}$$

ve

$$\tau^* = \{E \subset X : Cl^*(X - E) = X - E\}$$

olarak tanımlayalım.

Teorem 3.2.5. (i) Cl^*, X üzerinde bir Kuratowski operatör, yani τ^*, Cl^* tarafından üretilmiş alışılmış topolojidir.

(ii) $\tau \subseteq \tau^*$

(iii) $\forall x \in X$ için ya $\{x\}$ kapalı ya da $X - \{x\}$ g-kapalıdır.

İspat: (ii) $U \in \tau$ olsun. $X - U \subseteq G \in \tau$ ise $X - U$ kapalı olduğundan;

$$cl(X - U) = X - U \subseteq G$$

olur.

$$\Longrightarrow X - U \text{ g-kapalıdır.}$$

$$\Longrightarrow Cl^*(X - U) = X - U$$

$$\Longrightarrow U \in \tau^*$$

dir. Böylece $\tau \subseteq \tau^*$ dır.

(iii) $\forall x \in X$ için kabul edelim ki $\{x\}$ kapalı olmasın. $X - \{x\} \subseteq G \in \tau$ olsun. Bu durumda $G = X - \{x\}\ veya\ G = X$ dir. $G = X - \{x\}$ ise G açık olduğundan $\{x\}$ kapalı olur. Bu ise kabulümüzle çelişir. Böylece $G = X$ dir.

$$\Longrightarrow X - \{x\} \subseteq G = X$$

$$\Longrightarrow cl(X - \{x\}) \subseteq G = X$$

$\Longrightarrow X - \{x\}$ g-kapalıdır.

Teorem 3.2.6. Eğer (X, τ_1, τ_2) iki topolojili uzayı pairwise weakly Hausdoff ise (X, τ_1^*, τ_2^*) pairwise Hausdorfftur.

İspat: Kabul edelim ki (X, τ_1, τ_2) iki topolojili uzayı pairwise weakly Hausdorff ve $\{x_\sigma : \sigma \in \Sigma\}$, $x \in lim_{\tau_1^*} x_\sigma$ ve $y \in lim_{\tau_2^*} x_\sigma$ olacak şekilde X üzerinde bir ağ olsun. Teorem 3.2.5(ii)' den $x \in lim_{\tau_1} x_\sigma$ ve $y \in lim_{\tau_2} x_\sigma$ dir. Bu durumda (X, τ_1, τ_2) pairwise weakly Hausdorff olduğundan $cl_{\tau_1}(x) = cl_{\tau_2}(y)$ dir.

1.Durum: Kabul edelim ki $\{x\}$, τ_1-kapalı olsun.
$\{x\} = cl_{\tau_1}(x) = cl_{\tau_2}(y) \supset \{y\}$ olduğundan $x = y$ dir.

2.Durum: Kabul edelim ki {y}, τ_2-kapalı olsun. 1. duruma benzer şekilde $x = y$ dir.

3.Durum: Kabul edelim ki $\{x\}$, τ_1-kapalı olmasın ve {y}, τ_2-kapalı olmasın. Teorem 3.2.5(iii)' den $X - \{x\}$ ve $Y - \{y\}$ g-kapalı olduğundan $\{x\} \in \tau_1^*$ ve $\{y\} \in \tau_2^*$ dir. $x \in lim_{\tau_1^*} x_\sigma$ ve $\{x\} \in \tau_1^*$ olduğundan,

$\forall\sigma \geq \sigma_1,\ x_\sigma \in \{x\}\ (yani\ x_\sigma = x)$ olacak şekilde bir $\sigma_1 \in \Sigma$ vardır.

Benzer şekilde $y \in lim_{\tau_2^*} x_\sigma$ ve $\{y\} \in \tau_2^*$ olduğundan,

$\forall\sigma \geq \sigma_2, x_\sigma \in \{y\}\ (yani\ x_\sigma = y)$ olacak şekilde bir $\sigma_2 \in \Sigma$ vardır.

Σ yönlendirilmiş küme olduğundan $\sigma_0 > \sigma_1$ ve $\sigma_0 > \sigma_2$ olacak şekilde bir $\sigma_0 \in \Sigma$ vardır ve $x_{\sigma_0} \in \{x\} \cap \{y\} \neq \emptyset$ olur. Böylece $x = y$ dir.

Böylece $x \in lim_{\tau_1^*} x_\sigma$ ve $y \in lim_{\tau_2^*} x_\sigma$ olduğu her durumda $x = y$ dir. Buradan (X, τ_1^*, τ_2^*) pairwise Hausdorfftur.

Tanım 3.2.7. (X, τ_1, τ_2) iki topolojili uzay olsun. Eğer $cl_{\tau_2}(x) = cl_{\tau_1}(y)$ olduğu her durumda $x \in lim_{\tau_1} x_\sigma$ ve $y \in lim_{\tau_2} x_\sigma$ olacak şekilde X üzerinde bir $\{x_\sigma : \sigma \in \Sigma\}$ ağı varsa (X, τ_1, τ_2) iki topolojili uzayına ***bi-weakly Hausdorff*** denir.

Önerme 3.2.8. (X, τ_1, τ_2), $\tau_1 \subset \tau_2$ olacak şekilde iki topolojili uzay olsun.

(i) Eğer (X, τ_1, τ_2) pairwise Hausdorff ise (X, τ_2) Hausdorfftur.

(ii) Eğer (X, τ_1) Hausdorff ise (X, τ_1, τ_2) pairwise Hausdorfftur.

İspat: (i) (X, τ_1, τ_2), $\tau_1 \subset \tau_2$ olacak şekilde iki topolojili uzayı pairwise Hausdorff, $x \neq y$ ve $x, y \in X$ olsun. Böylece,

$$x \in U \,, y \in V \text{ ve } U \cap V = \emptyset$$

olacak şekilde $U \in \tau_1$ ve $V \in \tau_2$ vardır. $\tau_1 \subset \tau_2$ olduğundan (X, τ_2) Hausdorfftur.

(ii) (X, τ_1, τ_2), $\tau_1 \subset \tau_2$ olacak şekilde iki topolojili uzay, (X, τ_1) Hausdorff , $x \neq y$ ve $x, y \in X$ olsun. $U \cap V = \emptyset$ olacak şekilde $U \in \tau_1$ ve $V \in \tau_1 \subset \tau_2$ vardır. Böylece (X, τ_1, τ_2) pairwise Hausdorfftur.

3.3. (X, τ, τ^α) İki Topolojili Uzayları

Tanım 3.3.1. A, bir (X, τ) topolojik uzayının alt kümesi olsun. Eğer,

$$A \subset int_\tau(cl_\tau(int_\tau(A))$$

ise A alt kümesi $\alpha - açık$ olarak adlandırılır. Bütün $\alpha - açık$ kümelerinin ailesi τ^{α} ile gösterilir. O zaman τ^{α} , X üzerinde bir topoloji olup, daima $\tau \subseteq \tau^{\alpha}$ dır.

Teorem 3.3.2. (X, τ) topolojik uzayının Hausdorff olması için gerek ve yeter koşul (X, τ^{α}) topolojik uzayınında Hausdorff olmasıdır.

Tanım 3.3.3. (X, τ_1, τ_2) iki topolojili uzay olsun. Eğer hem (X, τ_1) hemde (X, τ_2) Hausdorff ise (X, τ_1, τ_2) *bi-Hausdorff* olarak adlandırılır.

Tanım 3.3.4. (X, τ) bir topolojik uzay olsun. Eğer her g-kapalı kümesi kapalı ise (X, τ) topolojik uzayına $T_{1/2}$ *-uzay* denir.

Tanım 3.3.5. (X, τ_1, τ_2) iki topolojili uzay olsun. Eğer X' de her bir farklı x, y nokta çifti için,

$$\text{ya } x \in U, y \in V \text{ ya da } x \in V, y \in U \text{ ve } U \cap V = \emptyset$$

olacak şekilde τ_1-açık kümesi U ve τ_2-açık kümesi V varsa (X, τ_1, τ_2) iki topolojili uzayına *pairwise semi-Hausdorff* uzay denir.

Önerme 3.3.6. (i) (X, τ, τ^{α}) iki topolojili uzayının pairwise Hausdoff olması için gerekli ve yeterli koşul (X, τ, τ^{α}) iki topolojili uzayının bi-Hausdorff olmasıdır.

(ii) (X, τ_1, τ_2) iki topolojili uzay, (X, τ_1), $T_{1/2}$ –uzay ve $\{x\}$' in τ_1-açık veya τ_1-kapalı olduğu her durumda $\{x\}$, τ_2-açık olsun. O zaman $(X, \tau_1^{\alpha}, \tau_2^{\alpha})$ iki topolojili uzayının pairwise semi-Hausdoff olması için gerekli ve yeterli koşul (X, τ_1, τ_2) iki topolojili uzayının pairwise semi-Hausdoff olmasıdır.

İspat: (i)($\Longrightarrow$): (X,τ,τ^{α}) pairwise Hausdoff bir iki topolojili uzay olsun. $\tau \subset \tau^{\alpha}$ olduğundan Önerme 3.2.8(i)' den (X,τ^{α}) Hausdofftur. Teorem 3.3.2' den de (X,τ) Hausdofftur. Böylece (X,τ,τ^{α}) bi-Hausdorfftur.

($\Longleftarrow$): $\tau \subset \tau^{\alpha}$ olduğundan açıktır.

(ii) ($\Longrightarrow$): $(X,\tau_1^{\alpha},\tau_2^{\alpha})$ iki topoloji uzayı pairwise semi-Hausdoff ve $x,y \in X$, $x \neq y$ olsun. O zaman $x \in U$, $y \in V$ ya da $x \in V$, $y \in U$, $U \cap V = \emptyset$ olacak şekilde bir τ_1^{α}-açık kümesi U ve τ_2^{α}-açık kümesi V vardır.

1.Durum: Kabul edelim ki $x \in U$ ve $y \in V$ olsun. Biliyoruz ki $\{x\}$ ya τ_1-açık ya da τ_1-kapalıdır.

(i) $\{x\}$, τ_1-açık olsun. $x \in G$, $y \in H$, $G \cap H = \emptyset$ olacak şekilde τ_1-açık kümesi $G = \{x\}$ ve τ_2-açık kümesi $H = int_{\tau_2}(cl_{\tau_2}\left(int_{\tau_2}(V)\right))$ vardır.

(ii) $\{x\}$, τ_1-kapalı olsun. $x \in \{x\}$, $y \in \{x\}^c$ ve $\{x\} \cap \{x\}^c = \emptyset$ olacak şekilde τ_1-açık kümesi $\{x\}^c$ ve τ_2-açık kümesi $\{x\}$ vardır.

2.Durum: Kabul edelim ki $x \in V$ ve $y \in U$ olsun. 1.Duruma benzer şekilde iki açık küme vardır.

Böylece iki durumdan (X,τ_1,τ_2) iki topoloji uzayı pairwise semi-Hausdofftur.

($\Longleftarrow$): $i = 1,2$ için $\tau_i \subset \tau_i^{\alpha}$ olduğundan açıktır.

3.4. (τ_i,τ_j,τ_k)-regüler Uzayları

Bu bölümde (τ_i,τ_j,τ_k)-regülerlik tanımını ve (τ_i,τ_j,τ_k)-regülerliğinden $(\tau_i^*,\tau_j^*,\tau_k^*)$-regülerliğe dönüşümünü inceleyeceğiz.

Tanım 3.4.1. (X, τ_1, τ_2) iki topolojili uzay olsun. Eğer $\forall x \in X$ noktası ve $x \notin F$ olacak şekilde ki her τ_i-kapalı alt kümesi F için,

$$F \subset V, x \in U \text{ } ve \text{ } U \cap V = \emptyset \text{ } (i, j, k \in \{1,2\})$$

olacak şekilde bir τ_j-açık kümesi V ve bir τ_k-açık kümesi U varsa (X, τ_1, τ_2) iki topolojili uzayına (τ_i, τ_j, τ_k)-*regüler* denir.

Önerme 3.4.2. $i, j, k \in \{1,2\}$ sabit tamsayılar olsun.

(i) Aşağıdakiler birbirine denktir.

(1) (X, τ_1, τ_2), (τ_i, τ_j, τ_k)-regülerdir.

(2) $\forall x \in X$ noktası ve $x \in G$, τ_i-açık kümesi için $x \in H \subset cl_{\tau_j}(H) \subset G$ olacak şekilde bir τ_k-açık kümesi H vardır.

(3) $\forall x \in X$ ve $x \notin K$, τ_i-kapalı kümesi için $x \in M$ ve $\left(cl_{\tau_j}(M)\right) \cap K = \emptyset$ olacak şekilde bir τ_k-açık kümesi M vardır.

(ii) Eğer (i) de $\tau_k = \tau_j$ alınırsa (1) - (4) birbirine denktir.

(4) $\forall x \in X$ ve $x \notin F$, τ_i-kapalı kümesi için $F \subset V$ ve $x \notin cl_{\tau_j}(V)$ olacak şekilde bir τ_j-açık kümesi V vardır.

İspat: $(1) \Rightarrow (2)$ (X, τ_1, τ_2), (τ_i, τ_j, τ_k)-regüler olsun. $\forall x \in X$ noktası ve $x \in G, \tau_i$-açık kümesi için $x \notin X - G$, τ_i-kapalı kümedir. Buradan (X, τ_1, τ_2), (τ_i, τ_j, τ_k)-regüler olduğundan $X - G \subset V$, $x \in H$ ve $H \cap V = \emptyset$ olacak şekilde τ_j-açık kümesi V ve τ_k-açık kümesi H vardır. Böylece,

$$x \in H \subset X - V \subset G \Rightarrow x \in H \subset cl_{\tau_j}(H) \subset X - V \subset G$$

dir.

$\mathbf{(2)} \Rightarrow \mathbf{(3)}$ $\forall x \in X$ noktası için $x \notin K$, τ_i-kapalı kümesi verilsin. Bu durumda $x \in X - K$, τ_i-açıktır. (2) sağlandığından,

$$x \in M \subset cl_{\tau_j}(M) \subset X - K \; ise \; \left(cl_{\tau_j}(M)\right) \cap K = \emptyset$$

olacak şekilde bir τ_k-açık kümesi M vardır.

$\mathbf{(1)} \Rightarrow \mathbf{(4)}$ (X, τ_1, τ_2), (τ_i, τ_j, τ_k)-regüler olsun. Bu durumda $x \notin F$ olacak şekilde ki her τ_i-kapalı alt kümesi F için,

$$F \subset V, x \in U \; ve \; U \cap V = \emptyset \; (i, j, k \in \{1,2\})$$

olacak şekilde bir τ_j-açık kümesi V ve bir τ_k-açık kümesi U vardır.

$$x \in U \; ve \; U \cap V = \emptyset \; \text{ise} \; x \notin cl_{\tau_k}(V) = cl_{\tau_j}(V)$$

dir.

(τ_1, τ_2, τ_2)-regüler uzaylar her zaman (τ_2, τ_1, τ_1)-regüler değildir.

Örnek 3.4.3. $X = \mathbb{R}$, $\tau_1 = \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{A : X - A \; sonlu\}$ ve τ_2, $\mathbb{R}$ üzerinde alışılmış topoloji olsun. $(\mathbb{R}, \tau_1, \tau_2)$, (τ_1, τ_2, τ_2)-regüler fakat (τ_2, τ_1, τ_1)-regüler değildir. Kabul edelim ki $(\mathbb{R}, \tau_1, \tau_2)$, (τ_2, τ_1, τ_1)-regüler olsun. $Şimdi$ $1 \notin F = [3,4]$, τ_2-kapalı kümesini alalım. $(\mathbb{R}, \tau_1, \tau_2)$, (τ_2, τ_1, τ_1)-regüler olduğundan $\mathbf{1} \in U$, τ_1-açık, $F \subset V$, τ_1-açık ve $U \cap V = \emptyset$ olacak şekilde U ve V açık kümeleri vardır.

$$U \cap V = \emptyset \Rightarrow V \subset X - U \Rightarrow F \subset V \subset X - U$$

dir. $X - U$ sonlu olduğundan F sonludur. Bu durum $F = [3,4]$ olması ile çelişir. O halde $(\mathbb{R}, \tau_1, \tau_2)$, (τ_2, τ_1, τ_1)-regüler değildir. (τ_1, τ_2, τ_2)-regüler olduğunu gösterelim. Şimdi F, τ_1-kapalı, $F \neq \mathbb{R}$ olsun. Bu durumda $X - F$, τ_1-açık olduğundan $X - (X - F) = F$ sonludur. F, τ_1-kapalı ve $x \notin F$ için $F = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, $\alpha = min\{|x - a_i| : i = 1,2, \dots, n\}$ diyelim.

$$U = B\left(x, \frac{\alpha}{2}\right) = \left(x - \frac{\alpha}{2}, x + \frac{\alpha}{2}\right) \text{ ve } V = \mathbb{R} - cl_{\tau_2}(U)$$

alırsak $x \in U, \tau_2$-açık, $F \subset V = \mathbb{R} - cl_{\tau_2}(U) \Rightarrow F \cap cl_{\tau_2}(U) = \emptyset$ ve $U \cap V = \emptyset$ olur. Böylece $(\mathbb{R}, \tau_1, \tau_2)$, (τ_1, τ_2, τ_2)-regülerdir.

Tanım 3.4.4. (X, τ_1, τ_2) iki topolojili uzay olsun. Eğer $\forall x \in X$ noktası ve $x \notin F$ olacak şekilde ki τ_i-kapalı alt kümesi F için,

$$F \subset V, x \in U \; ve \; U \cap (cl_{\tau_j}(V)) = \emptyset \; (i, j, k \in \{1,2\})$$

olacak şekilde bir τ_j-açık kümesi V ve bir τ_k –açık kümesi U varsa (X, τ_1, τ_2) iki topolojili uzayına (τ_i, τ_j, τ_k)-*strongly regüler* denir.

Önerme 3.4.5. $i, j, k \in \{1,2\}$ olsun.

(i) Eğer (X, τ_1, τ_2), (τ_i, τ_j, τ_j)-regüler ise $\tau_i \subset \tau_j$ dir.

(ii) Eğer (X, τ_1, τ_2), (τ_i, τ_j, τ_i)-regüler ve $\tau_i \subset \tau_j$ ise (τ_i, τ_j, τ_j) -regülerdir.

(iii) Eğer (X, τ_i) bir T_3 –uzay ve $\tau_i \subset \tau_j$ ise (X, τ_1, τ_2), (τ_i, τ_j, τ_j) –regülerdir.

(iv) Eğer (X, τ_1, τ_2), (τ_i, τ_j, τ_k)-strongly regüler ise (τ_i, τ_j, τ_k)-regülerdir.

(v) Eğer (X, τ_1, τ_2), (τ_i, τ_j, τ_k)-strongly regüler ise (τ_i, τ_j, τ_j)-regülerdir.

İspat: **(i)** $(X, \tau_1, \tau_2), (\tau_i, \tau_j, \tau_j)$-regüler olsun. O zaman Önerme 3.4.2' den $\forall x \in X$ noktası ve $\forall x \in G, \tau_i$-açık kümesi için $x \in H_x \subset G$ olacak şekilde bir τ_j-açık kümesi H_x vardır. $G = \cup \{H_x : x \in G\}$ dir. Böylece G, τ_j-açıktır.

(ii)-(iv)-(v) tanımdan açıktır.

(iii) (X, τ_i) bir T_3 –uzay ve $\tau_i \subset \tau_j$ olsun. (X, τ_i) bir T_3 –uzay olduğundan (X, τ_i) regülerdir. $\forall x \in X$ noktası ve $x \notin F, \tau_i$-kapalı kümesi için;

$$F \subset V, x \in U \ ve \ U \cap V = \emptyset$$

olacak şekilde U, V τ_i-açık kümeleri vardır. $\tau_i \subset \tau_j$ olduğundan V, τ_j-açıktır. Böylece (X, τ_1, τ_2), (τ_i, τ_j, τ_i)-regüler ve (ii)' den (X, τ_1, τ_2), (τ_i, τ_j, τ_j)-regülerdir.

Teorem 3.4.6. $i, j \in \{1,2\}$ sabit tamsayılar olsun.

(i) Eğer bir (X, τ_1, τ_2) iki topolojili uzayı (τ_i, τ_j, τ_j)-regüler ve (X, τ_i) topolojik uzayı bir $T_{1/2}$ –uzay ise (X, τ_j) bir Hausdorff uzaydır.

(ii) Eğer (i) de $\tau_j = \tau_i^{\alpha}$ alırsak $(X, \tau_i, \tau_i^{\alpha})$ pairwise Hausdorfftur.

(iii) Eğer $(X, \tau_1, \tau_2), (\tau_i, \tau_j, \tau_i)$-regüler ve (X, τ_i) topolojik uzayı bir T_1–uzay ise (X, τ_1, τ_2) pairwise Hausdorfftur.

İspat: **(i)** (X, τ_1, τ_2) iki topolojili uzayı (τ_i, τ_j, τ_j)-regüler ve (X, τ_i) topolojik uzayı bir $T_{1/2}$ –uzay olsun. Kabul edelim ki (X, τ_j) Hausdorff olmasın. O zaman $x \neq y$ ve $x, y \in lim_{\tau_j} x_\sigma$ olacak şekilde X üzerinde bir $\{x_\sigma : \sigma \in \Sigma\}$ ağı vardır. Biliyoruz ki $\{y\}$ ya τ_i-kapalı ya da τ_i-açıktır.

1. Durum: $\{y\}$, τ_i-kapalı olsun.$x \notin \{y\}$ olduğundan Önerme 3.4.2(ii)’ den $\{y\} \subset V$ ve $x \notin (cl_{\tau_j}(V))$ olacak şekilde τ_j-açık kümesi V vardır. $y \in lim_{\tau_j} x_\sigma$ olduğundan $\sigma \geq \sigma_1$ olduğu her durumda $x_\sigma \in V$ olacak şekilde $\sigma_1 \in \Sigma$ vardır. Benzer şekilde $\sigma \geq \sigma_2$ olduğu her durumda $x_\sigma \in X - cl_{\tau_j}(V)$ olacak şekilde $\sigma_2 \in \Sigma$ vardır. Şimdi $\sigma_1 \leq \sigma_0$ ve $\sigma_2 \leq \sigma_0$ olacak şekilde $\sigma_0 \in \Sigma$ alalım. O zaman $x_\sigma \in V \cap (X - cl_{\tau_j}(V))$ dir ve bu da $V \cap (X - cl_{\tau_j}(V)) = \emptyset$ olması ile çelişir.

2. Durum: $\{y\}$, τ_i-açık olsun. $F = Y - \{y\}$ alırsak F, τ_i-kapalıdır ve $y \notin F$ dir. 1. Duruma benzer bir çelişki elde edilir.
Böylece (X, τ_j) Hausdorfftur.

(ii) (i) de $\tau_j = \tau_i^\alpha$ alırsak (X, τ_1, τ_2) iki topolojili uzayı $(\tau_i, \tau_i^\alpha, \tau_i^\alpha)$-regüler ve (X, τ_i) topolojik uzayı bir $T_{1/2}$–uzay ise (X, τ_i^α) bir Hausdorff uzaydır. Teorem 3.3.2’ den (X, τ_i) Hausdorfftur. Böylece $(X, \tau_i, \tau_i^\alpha)$ bi-Hausdorfftur. Önerme 3.3.6(i)’ den $(X, \tau_i, \tau_i^\alpha)$ pairwise Hausdorfftur.

(iii) (X, τ_1, τ_2), (τ_i, τ_j, τ_i)-regüler ve (X, τ_i) topolojik uzayı bir T_1–uzay olsun. X’ de $x \neq y$ nokta çifti için $\{y\}$, τ_i-kapalı ve $x \notin \{y\}$ dir. Böylece $x \in U$, $\{y\} \subset V$ ve $U \cap V = \emptyset$ olacak şekilde τ_i-açık kümesi U ve τ_j-açık kümesi V vardır. O zaman (X, τ_1, τ_2), pairwise Hausdorfftur.

Teorem 3.4.7. $i, j, k \in \{1,2\}$ sabit tamsayılar olsun.

(i) Eğer (X, τ_1, τ_2), (τ_i, τ_j, τ_j)-regüler ve (τ_j, τ_i, τ_j)-regüler ise (X, τ_j^*) bir Hausdorff uzaydır.

(ii) Eğer (X, τ_1, τ_2), (τ_i, τ_j, τ_k)-regüler ve (X, τ_i) $T_{1/2}$-uzay ise (X, τ_1^*, τ_2^*), $(\tau_i^*, \tau_j^*, \tau_k^*)$-regülerdir.

İspat: (i) $(X, \tau_1, \tau_2), (\tau_i, \tau_j, \tau_j)$-regüler ve (τ_j, τ_i, τ_j)-regüler olsun. $x, y \in X$, $x \neq y$ için;

1. Durum: Farz edelim ki Teorem 3.2.5(iii)' den $\{x\}$, τ_j-kapalı olsun. $(X, \tau_1, \tau_2), (\tau_j, \tau_i, \tau_j)$-regüler olduğundan $y \in U$, $\{x\} \subset V$ ve $U \cap V = \emptyset$ olacak şekilde $U \in \tau_j$ ve $V \in \tau_i$ vardır. (τ_i, τ_j, τ_j)-regülerlik ve Önerme 3.4.5(i)' den $\tau_i \subset \tau_j$ ve Teorem 3.2.5(ii)' den $\tau_j \subset \tau_j^*$ dir. Böylece U ve V, τ_j^*-açıktır.

2. Durum: Farz edelim ki $\{y\}$, τ_j-kapalı olsun. Benzer olarak $x \in U$, $y \in V$, $U \cap V = \emptyset$ olacak şekilde $U, V \in \tau_j^*$ vardır.

3. Durum: Farz edelim ki $\{x\}$ ve $\{y\}$, τ_j-kapalı olmasın. Teorem3.2.5(iii)' den $X - \{x\}$ ve $Y - \{y\}$ g-kapalıdır. Böylece $\{x\}$ ve $\{y\}$ τ_j^*-açıktır.

Bu üç durumdan (X, τ_j^*) Hausdorfftur.

(ii) (X, τ_1, τ_2), (τ_i, τ_j, τ_k)-regüler ve (X, τ_i), $T_{1/2}$–uzay olsun. (X, τ_i), $T_{1/2}$–uzay olduğundan $\tau_i = \tau_i^*$ ve Teorem 3.2.5(ii)' den $\tau \subset \tau^*$dır. (X, τ_1, τ_2), (τ_i, τ_j, τ_k)-regüler olduğundan $x \notin F$ olacak şekilde ki her τ_i-kapalı kümesi F için $F \subset V,\ x \in U\ ve\ U \cap V = \emptyset\ (i, j, k \in \{1,2\})$ olacak şekilde $V \in \tau_j$ ve $U \in \tau_k$ vardır. $V \in \tau_j \subset \tau_j^*$ ve $U \in \tau_k \subset \tau_k^*$ dır. Buradan $x \notin F$ olacak şekilde ki her τ_i^*-kapalı kümesi F için $F \subset V,\ x \in U\ ve\ U \cap V = \emptyset\ (i, j, k \in \{1,2\})$ olacak şekilde $V \in \tau_j^*$ ve $U \in \tau_k^*$ vardır. Böylece (X, τ_1^*, τ_2^*), $(\tau_i^*, \tau_j^*, \tau_k^*)$-regülerdir.

3.5. İki Topolojili Uzaylarda Kompaktlık

Tanım 3.5.1.(X, τ_1, τ_2) iki topolojili uzay ve $\mathcal{U}$, bu uzayın bir örtüsü olsun. Eğer $\mathcal{U} \subset \tau_1 \cup \tau_2$ ise $\mathcal{U}$ örtüsüne $\tau_1\tau_2$***-açık örtü*** denir. Ayrıca $\mathcal{U}$, τ_1' in en az bir elemanını ve τ_2' nin en az bir elemanını içeriyorsa $\mathcal{U}$ örtüsüne *pairwise açık* denir.

Tanım 3.5.2. (X, τ_1, τ_2) iki topolojili uzay olsun. Eğer (X, τ_1, τ_2) iki topolojili uzayının her pairwise açık örtüsü sonlu bir alt örtüye sahipse bu uzaya *pairwise kompakt* denir.

Örnek 3.5.3. $\mathbb{R}$, reel sayılar kümesi, $\mathcal{R} = \{\emptyset, \mathbb{R}, (a, +\infty) : a \in \mathbb{R}\}$ ve $Q = \{\emptyset, \mathbb{R}, (-\infty, a) : a \in \mathbb{R}\}$ olsun. $\mathcal{U}$, $(\mathbb{R}, \mathcal{R}, Q)$' nun bir pairwise açık örtüsü olsun. Bir $(b, +\infty) = U \in \mathcal{U}$ alalım. Eğer $b < a$ olacak şekilde bir $(-\infty, a) = V \in \mathcal{U}$ varsa $\{U, V\} \subseteq \mathcal{U}$ bir örtü olur. Aksi halde $c = sup\{a : (-\infty, a) \in \mathcal{U}\ ve\ a \leq b\} \in \mathbb{R}$ vardır. O zaman $c \in (b_0, +\infty) = U_0 \in \mathcal{U}$ olacak şekilde bir $U_0 \in \mathcal{U}$ vardır. c' den dolayı $(-\infty, a_0) = V_0$ ve $b_0 < a_0 \leq c$ olacak şekilde $V_0 \in \mathcal{U}$ vardır. Bu durumda $\{V_0, U_0, U\} \subseteq \mathcal{U}$, $\mathbb{R}$' yi örter. Böylece $(\mathbb{R}, \mathcal{R}, Q)$ pairwise kompakttır.

Tanım 3.5.4. Eğer τ, X üzerinde bir topoloji ve A, X' in boş olmayan bir alt kümesi ise X üzerinde $\tau(A)$ topolojisi,

$$\tau(A) = \{\emptyset, X\} \cup \{A \cup U : U \in \tau\}$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 3.5.5. (X, τ_1, τ_2) iki topolojili uzayında aşağıdakiler birbirine denktir.

(i) (X, τ_1, τ_2) pairwise kompakttır.

(ii) τ_1' deki her $V \neq \emptyset$ kümesi için $\tau_2(V)$ topolojisi kompakttır ve τ_2' deki her $V \neq \emptyset$ kümesi için $\tau_1(V)$ topolojisi kompakttır.

(iii) X' in her τ_1-kapalı özalt kümesi τ_2-kompakttır ve X' in her τ_2-kapalı özalt kümesi τ_1-kompakttır.

İspat: (i)⇒(ii) (X, τ_1, τ_2) pairwise kompakt, $V \neq \emptyset$ herhangi bir τ_1-açık küme ve $\mathcal{U}$, X' in $\tau_2(V)$ açık örtüsü olsun. Böylece $\forall \alpha \in \mathcal{A}$, $U_\alpha \in \tau_2$ için $\mathcal{U} = \{V \cup U_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$ dir. O zaman $\{V\} \cup \{U_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$, X' in bir pairwise açık örtüsüdür. Bu yüzden

$\{V\} \cup \{U_{\alpha_i} : i = 1,2, \dots, n\}$ şeklinde tanımlanan sonlu bir alt örtüye sahiptir. Eğer gerekirse alt örtüye $\{V\}$ ekleyebiliriz. Bu durumda; $\{V \cup U_{\alpha_i} : i = 1,2, \dots, n\}$, X için $\mathcal{U}$' nun istenen alt örtüsüdür. Böylece $\tau_2(V)$ topolojisi kompakttır. Benzer şekilde τ_2' deki her $V \neq \emptyset$ kümesi için $\tau_1(V)$ topolojisi kompakttır.

(ii)⇒(iii) τ_1' deki her $V \neq \emptyset$ kümesi için $\tau_2(V)$ topolojisi kompakt ve K, X' in herhangi bir τ_1-kapalı özalt kümesi olsun. Böylece $\emptyset \neq V = X - K$, τ_1-açık kümedir. $\{U_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$, K' nın bir τ_2-açık örtüsü olsun. $\{V \cup U_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$, X' in bir $\tau_2(V)$ açık örtüsüdür. Böylece bazı n tamsayıları için;

$$X = V \cup \left[\cup \{U_{\alpha_i} : i = 1,2, \dots, n\} \right]$$

yazabiliriz. Bu durumda; $K \subset \cup \left[\cup \{U_{\alpha_i} : i = 1,2, \dots, n\} \right]$, K, τ_2-kompakttır.

(iii)⇒(i) X' in her τ_1-kapalı özalt kümesi τ_2-kompakt, X' in her τ_2-kapalı özalt kümesi τ_1-kompakt, $\mathcal{U}$, X' in bir pairwise açık örtüsü, $\{U_\beta : \beta \in \mathcal{B}\}$, $\mathcal{U}$' da τ_1-açık kümeler ve $\{V_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$, $\mathcal{U}$' da τ_2-açık kümeler olsun. İki durum vardır.

1. Durum: $\cup \{V_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\} = X$. $U_{\beta_0} \neq \emptyset$ olacak şekilde bir $\beta_0 \in \mathcal{B}$ seçelim. O zaman $\{V_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$, τ_1-kapalı özalt küme $X - U_{\beta_0}$' ın bir τ_2-açık örtüsüdür; bu yüzden $X - U_{\beta_0} \subset \cup \{V_{\alpha_i} : i = 1,2, \dots, n\}$ olacak şekilde bir $\{V_{\alpha_i} : i = 1,2, \dots, n\}$ alt örtüsü vardır. Böylece $\{U_{\beta_0}, V_{\alpha_1}, \dots, V_{\alpha_n}\}$, X için $\mathcal{U}$' nun bir sonlu alt örtüsüdür.

2. Durum: $\cup \{V_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\} \neq X$. $K = X - \cup \{V_\alpha : \alpha \in \mathcal{A}\}$, X' in τ_2-kapalı özalt kümesi ve $K \subset \cup \{U_\beta : \beta \in \mathcal{B}\}$ dir. Böylece $K \subset \cup \{U_{\beta_i} : i = 1,2, \dots, m\}$ olacak şekilde $\{U_{\beta_i} : i = 1,2, \dots, m\}$ alt örtüsü vardır. Eğer $\{U_{\beta_i} : i = 1,2, \dots, m\} = X$ ise ispat açıktır. Eğer $\{U_{\beta_i} : i = 1,2, \dots, m\} \neq X$ ise $X - \cup \{U_{\beta_i} : i = 1,2, \dots, m\}$, X' in τ_1-kapalı özalt kümesidir. Hipotezden $X - \cup \{U_{\beta_i} : i = 1,2,\dots,m\} \subset \{V_{\alpha_j} : j = 1,2,\dots,p\}$ olacak şekilde bir alt örtüsü vardır. Böylece $\{U_{\beta_i} : i = 1,2,\dots,m\} \cup \{V_{\alpha_j} : j = 1,2,\dots,p\}$, X için $\mathcal{U}$' nun bir sonlu alt örtüsüdür.

İki durumdan (X,τ_1,τ_2) pairwise kompakttır.

Tanım 3.5.6. (X,τ_1,τ_2) iki topolojili uzay olsun. Eğer X' in her τ_1-açık örtüsü için sonlu bir τ_2-açık alt örtüsü varsa (X,τ_1,τ_2), τ_2' ye göre τ_1-kompakttır. (X,τ_1,τ_2) iki topolojili uzayı τ_2' ye göre τ_1-kompakt ve τ_1' e göre τ_2-kompakt ise bu uzaya *B-kompakt* denir

Topolojik uzaylarda olduğu gibi herhangi bir sonlu iki topolojili uzay pairwise kompakttır ancak B-kompakt olmak zorunda değildir.

Örnek 3.5.7. $X = \{a,b,c\}$, $\tau_1 = \{\emptyset, X, \{a,b\}, \{c\}\}$ ve $\tau_2 = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b,c\}\}$ olsun. (X,τ_1,τ_2) iki topolojili uzayı B-kompakt değildir. Çünkü $\{\{a\},\{b,c\}\}$, X' in bir τ_2-açık örtüsüyken τ_1-açık alt örtüsü yoktur.

3.6. Pairwise Lindelöff İki Topolojili Uzaylar

Tanım 3.6.1. (X,τ_1,τ_2) iki topolojili uzay olsun. Eğer (X,τ_1,τ_2) iki topolojili uzayının her pairwise açık örtüsü sayılabilir bir alt örtüye sahipse bu uzaya *pairwise Lindelöff uzay* denir.

Önerme 3.6.2. Her pairwise kompakt uzay bir pairwise Lindelöff uzaydır.

Tanım 3.6.3. (X,τ_1,τ_2) iki topolojili uzay olsun. Eğer (X,τ_1,τ_2) iki topolojili uzayının her pairwise sayılabilir açık örtüsü sonlu bir alt örtüye sahipse bu uzaya *pairwise sayılabilir kompakt uzay* denir

Önerme 3.6.4. Bir pairwise Lindelöff uzayda pairwise sayılabilir kompaktlık ile pairwise kompaktlık birbirine denktir.

Önerme 3.6.5. Bir pairwise Lindelöff uzayın pairwise sürekli görüntüsü pairwise Lindelöfftür.

Önerme 3.6.6. Herhangi bir ikinci sayılabilir iki topolojili uzay pairwise Lindelöfftür.

İspat: (X,τ_1,τ_2) ikinci sayılabilir iki topolojili uzay, $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ ve $\{C_m\}_{m=1}^{\infty}$ sırasıyla τ_1 ve τ_2 için sayılabilir bazlar ve $\mathcal{U}=\{U_\alpha:\alpha\in\mathcal{A}\}$, X' in pairwise açık örtüsü olsun. Bazı $U_\alpha\in\mathcal{U}\cap\tau_1$ için $B_n\subset U_\alpha$ olacak şekildeki n tamsayılarının kümesi N ve bazı $U_\alpha\in\mathcal{U}\cap\tau_2$ için $C_m\subset U_\alpha$ olacak şekildeki m tamsayılarının kümesi M olsun. $B_n\subset U_\alpha$ olacak şekildeki U_α' ların biri V_n ve $C_m\subset U_\alpha$ olacak şekildeki U_α' ların biri W_m ile tanımlansın. O zaman $\mathcal{U}^*=\{V_n: n\in \mathrm{N}\}\cup\{W_m: m\in \mathrm{M}\}$, X için $\mathcal{U}$' nun sayılabilir bir alt örtüsüdür. $x\in X$ olsun. $\mathcal{U}$, X' i örttüğünden $x\in U_\beta$ olacak şekilde $U_\beta\in\mathcal{U}$ vardır. Şimdi U_β, ya τ_1-açık ya da τ_2-açıktır. Eğer U_β, τ_1-açık ise $x\in B_k\subset U_\beta$ olacak şekilde bir k tamsayısı vardır. Böylece $x\in B_k\subset V_k$ olacak şekilde bir $V_k\in\mathcal{U}^*$ kümesi vardır. Benzer şekilde; eğer U_β, τ_2-açık ise $x\in C_l\subset U_\beta$ olacak şekilde bir l tamsayısı vardır. Böylece $x\in C_l\subset W_l$ olacak şekilde bir $W_l\in\mathcal{U}^*$ kümesi vardır. Bu durumda (X,τ_1,τ_2) pairwise Lindelöfftür.

Önerme 3.6.7. (X,τ_1,τ_2) iki topolojili uzay olsun. Eğer bu uzay pairwise Lindelöff ve $A\subset X$, τ_1-kapalı ise A, pairwise Lindelöff ve τ_2 Lindelöfftür.

Teorem 3.6.8. (X,τ_1,τ_2) iki topolojili uzay olsun. Eğer bu uzay pairwise Lindelöff ve pairwise regüler ise pairwise normaldir.

İspat: (X, τ_1, τ_2) iki topolojili uzayı pairwise Lindelöff ve pairwise regüler olsun. A, X' in τ_1-kapalı alt kümesi ve B, X' in τ_2-kapalı alt kümesi ve $A \cap B = \emptyset$ olsun. Eğer $A = X$ veya $B = X$ ise ispat açıktır. Değilse Ave B, X' in özalt kümesidir. $x \in B$ olsun. τ_1, τ_2' ye göre regüler olduğundan $x \in U_x$ ve $(cl_{\tau_2} U_x) \cap A = \emptyset$ olacak şekilde bir τ_1-açık kümesi U_x vardır. Böylece $\mathcal{U} = \{U_x : x \in B\}$, B' nin τ_1-açık örtüsüdür, τ_2-kapalıdır ve Önerme 3.6.7' den τ_1 Lindelöfftür. Buradan her i pozitif tamsayısı için $(cl_{\tau_2} U_i) \cap A = \emptyset$ olacak şekilde B için $\mathcal{U}$' nun bir $\{U_1, U_2, \dots\}$ sayılabilir alt örtüsü vardır. Eğer;

$$W_n = V_n - \bigcup_{i \leq n} \{cl_{\tau_2} U_i\}$$

ve

$$Y_m = U_m - \bigcup_{j \leq m} \{cl_{\tau_1} V_j\}$$

ise W_n, τ_2-açık ve Y_m, τ_1-açıktır $(m, n \in \mathbb{Z}^+)$. O zaman $j \leq n$ için $W_n \cap U_j = \emptyset$ ve $Y_j \subset U_j$ dir. Bu durumda $W_n \cap Y_j = \emptyset$ olur. Benzer şekilde $n \leq j$ için $Y_j \cap W_n = \emptyset$ dir. Buradan her m,n için $W_n \cap Y_m = \emptyset$ olur. Şimdi $\{V_n\}$, A' nın τ_2-açık örtüsüdür ve $cl_{\tau_2} U_i$' den hiçbir küme A' nın noktalarını içermez. Bu durumda $\{W_n\}$, A' nın bir τ_2-açık örtüsüdür. Böylece;

$$A \subset U = \cup_n W_n \text{ ve } U,\ \tau_2\text{-açıktır.}$$

Benzer şekilde;

$$B \subset V = \cup_m Y_m \text{ ve } V,\ \tau_1\text{-açıktır.}$$

Ayrıca $U \cap V = \emptyset$ dir. Dolayısıyla (X, τ_1, τ_2) pairwise normaldir.

Sonuç 3.6.9. Herhangi bir ikinci sayılabilir pairwise regüler iki topolojili uzay pairwise normaldir.

Sonuç 3.6.10. Herhangi bir pairwise kompakt pairwise regüler iki topolojili uzay pairwise normaldir.

Teorem 3.6.11. Herhangi bir pairwise Hausdorff pairwise kompakt iki topolojili uzay pairwise regülerdir.

Teorem 3.6.12. Bir pairwise Hausdorff pairwise kompakt iki topolojili uzay pairwise normaldir.

Tanım 3.6.13. (X,τ) topolojik uzay ve $A \subseteq X$ olsun. Eğer A kümesi sayılabilir sayıda açık kümelerin bir kesişimi olarak yazılabiliyorsa A kümesine G_δ *kümesi* denir.

Teorem 3.6.14. (X,τ_1,τ_2) iki topolojili uzay olsun. Eğer τ_1, τ_2' ye göre regüler ve (X,τ_1) ikinci sayılabilir ise her τ_1-kapalı kümesi bir $\tau_2 - G_\delta$' dır.

İspat: (X,τ_1,τ_2) iki topolojili uzay, τ_1, τ_2' ye göre regüler, (X,τ_1) ikinci sayılabilir ve A herhangi bir τ_1-kapalı küme olsun. Eğer $A = X$ ise ispat açıktır. $A \neq X$ ise ;

$$\forall x \notin A \text{ için } x \in U_x \subset \left(cl_{\tau_2} U_x\right) \subset X - A$$

olacak şekilde τ_1-açık kümesi U_x vardır. $\{V_n : n \in N, tamsayılar\}$, (X,τ_1) için bir sayılabilir baz olsun. Bazı $n(x)$ tamsayıları için $x \in V_{n(x)} \subset U_x$ dir.

Şimdi $V_{n(x)} \subset \left(cl_{\tau_2} U_x\right)$ olduğundan $\left(cl_{\tau_2} V_{n(x)}\right) \cap A = \emptyset$ dir ve böylece

$$A = \cap \left\{X - \left(cl_{\tau_2} V_{n(x)}\right) : x \notin A\right\}$$

dir. Farklı $n(x)$ tamsayılarının sayısı sayılabilir olduğundan A bir $\tau_2 - G_\delta$' dır.

Tanım 3.6.15. (X, τ_1, τ_2) iki topolojili uzay olsun. Eğer (X, τ_1, τ_2) pairwise normal, her τ_1-kapalı kümesi bir $\tau_2 - G_\delta$ ve her τ_2-kapalı kümesi bir $\tau_1 - G_\delta$ ise (X, τ_1, τ_2) uzayına *pairwise perfectly normal* denir.

Teorem 3.6.16. (X, τ_1, τ_2) iki topolojili uzay olsun. Eğer (X, τ_1, τ_2) pairwise regüler ve ikinci sayılabilir ise bu uzay pairwise perfectly normaldir.

İspat: (X, τ_1, τ_2) pairwise regüler ve ikinci sayılabilir olsun. Sonuç3.6.9' dan (X, τ_1, τ_2) pairwise normaldir. Ayrıca Teorem 3.6.14' den kapalı kümeler $G_\delta s$ dir. Böylece (X, τ_1, τ_2) pairwise perfectly normaldir.

KAYNAKLAR

BÜLBÜL, A., 1994. Genel Topoloji, Karadeniz Teknik Ünv., 172(48), Trabzon.

COOKE, I. E., and REILLY, I. L., 1975. On Bitopological Compactness. J.London Math. Soc., 8:518-522

FLETCHER, P., HOYLE, H. B., and PATTY, C. W., 1969. Comparison Of Topologies. Duke Math. J., 36:325-331

FUKUTAKE, T., 1987. On Some Seperation Properties on Bitopological Spaces. Kyungpook Math. J. Volume 27, 2:115-125

KELLY, J. C., 1963. Bitopological Spaces. Proc. London. Math. Soc., 13:71-89

LANE, E. P., 1967. Bitopological Spaces and Quasi-Uniform Spaces. Proc. London Math. Soc. 17:241-256

REILLY, I. L., 1973. Pairwise Lindelof Bitopological Spaces. Kyungpook Math. J. 13:1-4

WİLLARD, S., 1970. General Topology, Addison-Wesley, London,

ÖZGEÇMİŞ

15/05/1989 yılında Adana’ da doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Adana’da tamamladı. 2005 yılında başladığı Erciyes Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü’ nden 2009 yılında mezun oldu ve aynı yıl Çukurova Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı’ nda tezli yüksek lisans eğitimine başladı ve halen tezli yüksek lisans öğrencisi olarak öğrenimine devam etmektedir.