ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Serkan ÖKTEN

2-NORMLU UZAYLAR

MATEMATİK ANABİLİM DALI

ADANA, 2010

ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

2-NORMLU UZAYLAR

Serkan ÖKTEN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Bu Tez 10/08/2010 Tarihinde Aşağıdaki Jüri Üyeleri Tarafından Oybirliği/~~Oyçokluğu~~ ile Kabul Edilmiştir.

....	....	....
Yrd. Doç. Dr. Yusuf KARAKUŞ DANIŞMAN	Prof. Dr. Doğan DÖNMEZ ÜYE	Yrd. Doç. Dr. Ersin KIRAL ÜYE

Bu Tez Enstitümüz Matematik Anabilim Dalında hazırlanmıştır.

Kod No:

Prof. Dr. İlhami YEĞİNGİL
Enstitü Müdürü

ÖZ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

2-NORMLU UZAYLAR

Serkan ÖKTEN

ÇUKUROVA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Danışman **:**Yrd. Doç. Dr. Yusuf KARAKUŞ
Yıl **:** 2010, **Sayfa:** 68
Jüri **:** Yrd. Doç. Dr. Yusuf KARAKUŞ
:Prof. Dr. Doğan DÖNMEZ
:Yrd. Doç. Dr. Ersin KIRAL

Bu çalışmada 2-Normlu Uzaylar, 2-Banach Uzayları ve Sınırlı Lineer 2-Fonksiyoneller incelenmiş ve ayrıca Genelleştirilmiş 2-Normlu Uzaylarda Hahn-Banach Teoremi ele alınmıştır.

Anahtar Kelimeler: 2-Norm, 2-Normlu Uzaylar, 2-Banach Uzayları, Sınırlı Lineer 2-Fonksiyoneller, Hahn-Banach Teoremi

ABSTRACT

MSc THESIS

2-NORMED SPACES

Serkan ÖKTEN

ÇUKUROVA UNIVERSITY
INSTITUTE OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES
DEPARTMENT OF MATHEMATICS

Supervisor **:** Asst. Prof. Dr. Yusuf KARAKUŞ
Year **:** 2010, **Pages:** 68
Jury **:** Asst. Prof. Dr. Yusuf KARAKUŞ
:Prof. Dr. Doğan DÖNMEZ
:Asst. Prof. Dr. Ersin KIRAL

In this thesis, 2-Norm, 2-Normed Spaces, 2-Banach Spaces and Bounded Linear 2-Fonctionals were studied and also Hahn-Banach Theorem In Generalized 2-Normed Spaces was considered.

Key Words: 2-Norm, 2-Normed Spaces, 2-Banach Spaces, Bounded Linear 2-Fonctionals, Hahn-Banach Theorem

TEŞEKKÜR

Yüksek lisan çalışmamda hiçbir özveriden kaçınmadan aydınlatıcı fikirleri ile bu eserin meydana gelmesini sağlayan saygıdeğer hocam, sayın Yrd. Doç. Dr. Yusuf KARAKUŞ ’a, çalışmamın başlangıç aşamasında kaynak ve yol göstererek desteğini esirgemeyen hocalarım, sayın Prof. Dr. Doğan DÖNMEZ ve sayın Yrd. Doç. Dr. Mehmet AÇIKGÖZ ’e, ve eğitim hayatıma ilk adım attığım günden itibaren ellerinden gelen hiçbir desteği esirgemeyen sevgili anneme, babama ve tüm aile fertlerime teker teker sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER SAYFA

1.GİRİŞ

Bu tezde 2-Norm ve 2-Banach uzayları incelenmiştir. 2-Norm aşağıdaki şekilde tanımlanır.

X bir vektör uzayı ve $\|\cdot,\cdot\|$, $X \times X$ üzerinde tanımlı reel değerli bir fonksiyon olsun. $x, y, z \in X$ ve $a \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

(2N1): $\|x, y\| \geq 0$, $\|x, y\| = 0$ ancak ve ancak x ve y lineer bağımlıysa,

(2N2): $\|x, y\| = \|y, x\|$,

(2N3): $\|a\,x, y\| = |a|\,\|x, y\|$,

(2N4): $\|x, y+z\| \leq \|x, y\| + \|x, z\|$,

koşullarını sağlayan $\|\cdot,\cdot\|$ fonksiyonuna ***2-norm*** ve $\left(X, \|\cdot,\cdot\|\right)$ ikilisine de ***2-normlu lineer uzay*** veya ***2-normlu vektör uzay*** yada kısaca ***2-normlu uzay*** denir.

Bu çalışmada Sınırlı Lineer 2-Fonksiyonellerle ilgili teoremler ve sonuçlar ele alınmıştır.

Diğer çalışmalar kısmında ise Hahn-Banach Teoreminin Genelleştirilmiş 2-Normlu uzaylar üzerine uygulanması incelenerek ilgili teoremlere ve sonuca yer verilmiştir.

2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Bu çalışmada K, hem $\mathbb{R}$, reel sayılar, hem de $\mathbb{C}$, kompleks sayılar, kümelerini ifade etmek için kullanılmıştır. K ’nın elemanları skalerler olarak adlandırılmıştır.

2.1 Lineer Uzaylar

Tanım 2.1.1: X bir küme ve K bir cisim olsun. $X\times X$ ’den X ’e $(x+y)+z=x+(y+z)$ $(x,y)\to x+y$ toplama ve $(a,y)\to a\,x$ skalerle çarpma fonksiyonları aşağıdaki koşulları sağlarsa o zaman X ’e K cismi üzerinde bir ***lineer uzay veya vektör uzay*** denir.

$\forall\; x,y,z\in X$ ve $a,b\in K$ için:

A$_1$) $(x+y)+z=x+(y+z)$,

A$_2$) $x+y=y+x$,

A$_3$) $\forall\; x\in X$ için $x+0=0+x=x$ olacak biçimde bir $0\in X$ vardır,

A$_4$) $\forall\; x\in X$ ve $x\neq 0$ için $x+(-x)=(-x)+x=0$ olacak biçimde bir $(-x)\in X$ vardır,

S$_1$) $a(x+y)=a\,x+a\,y$,

S$_2$) $(a+b)x=a\,x+b\,x$,

S$_3$) $a(b\,x)=(ab)x$,

S$_4$) $1.x=x$.

Bir lineer uzay $\mathbb{R}$ üzerinde tanımlı ise bir ***reel vektör uzay*** ve $\mathbb{C}$ üzerinde tanımlı ise bir ***kompleks vektör uzay*** olarak adlandırılır.

A$_1$-A$_4$ özellikleri X ’in toplama altında bir abelian gurup olduğunu gösterir. X ’in elemanlarına ***noktalar*** veya ***vektörler*** denir. 0 sembolü hem sıfır skaleri hem de 0 vektörünü göstermek için kullanılır. Ayrıca $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ ’nin bir alt kümesi olduğundan $\mathbb{R}$

üzerindeki bir vektör uzay aynı zamanda £ üzerinde de bir vektör uzay olarak ele alınabilir.

Örnek 2.1.1: Reel sayıların $x=(a_1,a_2,...,a_n)$ biçimli bütün n-lilerinin kümesi $V_n(¡)$ ile gösterilsin. Aşağıdaki toplama ve skalerle çarpma işlemlerine göre $V_n(¡)$ bir vektör uzayıdır. Bu uzaya n-boyutlu reel öklid uzayı denir:

$$(a_1,...,a_n)+(b_1,...,b_n)=(a_1+b_1,...,a_n+b_n)\,,$$

$$g\,(a_1,...,a_n)=(ga_1,...,ga_n)\,.$$

n=1 için $V_1(¡)=¡$ ve $V_1(£)=£$ dir. Böylece ¡ ve £ kendi üzerlerinde birer vektör uzayıdır.

Tanımda aşağıdaki özellikler görülür:

1) $\forall\ x\in X$ için $0x=0$,
2) $\forall\ a\in K$ için $a0=0$,
3) Sıfır vektör 0 tektir,
4) Her bir $x\in X$ için A_4 ’de belirtilen $(-x)$ elemanı tektir,
5) $\forall\ x\in X$ için $(-1)x=-x$,
6) $x,y\in X$ iki vektör olsun, $x+y=z$ olacak biçimde tek bir $z\in X$ vektörü vardır.

Örnek 2.1.2: *X*, boş olmayan bir *S* kümesinden bir *K* cismine tanımlı tüm fonksiyonların kümesi olsun.

$$(f+g)(t)=f(t)+g(t)\,,\ (a\,f)(t)=a\,f(t)$$

biçiminde tanımlı toplama ve skalerle çarpma işlemlerine göre *X*, *K* üzerinde bir vektör uzayıdır.

Eğer Örnek 2.1.2 ‘de $S=\{1,...,n\}$ alınırsa, $V_n(¡)$ ve $V_n(£)$ ‘nin sırasıyla ¡ ve £ üzerinde birer vektör uzayı olduğu görülür. Eğer *S*= ¥ , tüm pozitif tamsayılar kümesi, alınırsa *X*, *K* ’nın elemanlarının tüm dizilerinin kümesi olur, toplama ve skalerle çarpma işlemleri aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$(a_n)+(b_n)=(a_n+b_n)\,,\ g\,(a_n)=(ga_n)\,.$$

Böylece bu diziler, tanımlanmış olan işlemlerle K üzerinde $V_\infty(K)$ ile gösterilen bir vektör uzayı oluşturur.

Eğer Örnek 2.1.2 ‘de, $S=\{(i,j):\ i=1,...,m;\ j=1,...,n\}$ alınırsa X, K ’daki tüm $m\times n$ matrislerinin kümesi olur. $a^i_j \in K$ iken bir matrisi

$$A=(a^i_j)=\begin{pmatrix} a^1_1 & a^1_2 & \cdots & a^1_n \\ a^2_1 & a^2_2 & \cdots & a^2_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a^m_1 & a^m_2 & \cdots & a^m_n \end{pmatrix}$$

biçiminde gösterirsek, X ‘deki toplama ve skalerle çarpma işlemleri aşağıdaki şekilde ifade edilebilir:

$$A+B=(a^i_j)+(b^i_j)=\begin{pmatrix} a^1_1+b^1_1 & a^1_2+b^1_2 & \cdots & a^1_n+b^1_n \\ a^2_1+b^2_1 & a^2_2+b^2_2 & \cdots & a^2_n+b^2_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a^m_1+b^m_1 & a^m_2+b^m_2 & \cdots & a^m_n+b^m_n \end{pmatrix}=(a^i_j+b^i_j),$$

ve

$$g\,A=g\,(a^i_j)=\begin{pmatrix} ga^1_1 & ga^1_2 & \cdots & ga^1_n \\ ga^2_n & ga^2_n & \cdots & ga^2_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ga^m_1 & ga^m_2 & \cdots & ga^m_n \end{pmatrix}=(ga^i_j).$$

Böylece tüm $m\times n$ matrislerinin kümesi yukarıda ifade edilen işlemlerle, K üzerinde K^m_n biçiminde gösterilen bir vektör uzayı olur.

E, K üzerinde tanımlı bir X lineer uzayının bir alt kümesi olsun. $x,y\in E$ ve $a,b\in K$ iken $a\,x+b\,y\in E$ oluyorsa veya eş değer olarak, $x+y\in E$ ve $a\,x\in E$ oluyorsa E ’ye X ’in bir lineer alt uzayı denir. Böylece E ’nin kendisi de K üzerinde bir vektör uzayıdır. $\{0\}$ herhangi bir vektör uzayın alt uzayıdır ve trivial lineer uzay olarak adlandırır.

Tanım 2.1.2: X bir vektör uzayı ve *M,* X ’in bir alt kümesi olsun. Eğer herhangi bir $m_0\in M$ için $M-m_0$ kümesi, yani

$M - m_0 = \{ m - m_0 : \forall m \in M$ ve $m_0 \in M \}$ kümesi, X ’in bir lineer alt uzayı ise o zaman M ’ye X ’de bir lineer manifold denir.

X ’in her bir alt vektör uzayı bir ***lineer manifolddur.***

X, toplama ve skalerle çarpma işlemleri ile $[a,b]$ kapalı aralığında tanımlı tüm reel değerli fonksiyonların kümesi olsun. X, Örnek 2.1.2 ’den dolayı, ¡ üzerinde bir vektör uzaydır. E, X ’in X ‘deki tüm sürekli fonksiyonları içeren bir alt kümesi olsun. Eğer f ve g sürekli fonksiyonlar, a ve b herhangi iki reel sayı ise $a\,f + b\,g$ süreklidir ve E, X ’in bir alt uzayıdır. Bu uzay $C[a,b]$ ile gösterilir.

Verilen bir X vektör uzayı ve X ’in bir E alt uzayı ile aşağıdaki biçimde başka bir vektör uzayı düzenlenebilir:

X ’de eğer $a - b \in E$ ise $a \equiv b$ şeklinde bir bağıntı tanımlanır. Bunun bir denklik bağıntısı olduğunu görmek oldukça kolaydır. Ayrıca, bu denklik bağıntısı şu özellikleri sağlar: Eğer $a \equiv b$ ve $c \equiv d$ ise $a + c \equiv b + d$, ve $\forall\ \alpha \in$ K için $a \equiv b$ ise $\alpha\, a \equiv \alpha\, b$ dir. Bu denklik bağıntısı X/E bölüm kümesi ile gösterilir ve a ‘nın temsil ettikleri de (a) denklik sınıfı biçiminde ifade edilir. Bu durumda aşağıda tanımlanan toplama ve skalerle çarpma işlemleri ile X/E bir vektör uzayıdır:

$$(a) + (b) = (a + b)\,,\ \alpha\,(a) = (\alpha\, a)\,.$$

Her zaman olduğu gibi böyle bir durumda gösterilmesi gereken şey bu tanımların temsil eden kullanımlarının bağımsız olduğudur, örneğin, eğer $(a)=(a')$ ve $(b) = (b')$ ise $(a) + (b) = (a + b) = (a' + b') = (a') + (b')$ olduğu gösterilmelidir. X/E lineer uzayına X modül E ’nin bölüm uzayı denir.

Tanım 2.1.3: X bir vektör uzayı olsun. $\forall x, y \in X$ ve $\alpha \in K$ için aşağıdaki koşulları sağlayan reel değerli $x \to \|x\|$ fonksiyonuna X üzerinde bir ***norm*** denir.

(N_1) $\|x\| \geq 0$ ve $\|x\| = 0$ ancak ve ancak $x = 0$ iken,

(N_2) $\|\alpha\, x\| = |\alpha|\,\|x\|$,

(N_3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Üzerinde $\| \cdot \|$ normu ile tanımlı olan X lineer uzayına normlu vektör uzay denir ve $\left(X, \| \, . \, \|\right)$ biçiminde gösterilir.

Örnek 2.1.3: Örnek 2.1.2 'deki $V_n(\mathbb{R})$ $\mathbb{R}$ üzerinde bir vektör uzayıdır. $V_n(\mathbb{R})$ üzerinde norm şu şekilde tanımlanır. $\forall\ x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in V_n(\mathbb{R})$ için

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2} = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Gerçekten de $(\mathrm{N}_1), (\mathrm{N}_2)$ ve (N_3) koşulları kolaylıkla doğrulanabilir. Böylece, $\left(V_n(\mathbb{R}), \| \, . \, \|\right)$ bir normlu vektör uzayıdır.

Örnek 2.1.4: Örnek 2.1.2 'den $C[a,b]$, $\mathbb{R}$ üzerinde bir vektör uzayıdır. $f \in C[a,b]$ 'nin normu ise aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\| f \| = \max_{x \in C[a,b]} \left| f(x) \right|.$$

Gerçekten de $(\mathrm{N}_1), (\mathrm{N}_2)$ ve (N_3) koşulları kolaylıkla doğrulanabilir. Böylece, $\left(C[a,b], \| \, . \, \|\right)$ bir normlu vektör uzayıdır.

Vektör uzayların normu doğal olarak aşağıdaki gibi tanımlanan bir metrik meydana getirir:

Tanım 2.1.4: Bir X kümesi üzerinde, aşağıdaki koşulları sağlayan $(x,y) \to d(x,y)$ fonksiyonuna bir ***metrik*** (veya bir ***uzaklık fonksiyonu***) denir. $\forall x, y, z \in X$ için,

(D_1) $d(x,y) \geq 0$,

(D_2) $d(x,y) = 0$ ancak ve ancak $x = y$ ise,

(D_3) $d(x,y) = d(y,x)$,

(D_4) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(y,z)$.

Üzerinde bir d metriği ile birlikte tanımlanan X kümesine ***metrik uzay*** denir ve (X,d) ile gösterilir.

Örnek 2.1.5: X boş olmayan bir küme ve d reel değerli bir fonksiyon olsun,

$$d(x,y)=\begin{cases}0, & x=y,\\ 1, & x\neq y.\end{cases}$$

Bu durumda d, X üzerinde bir metriktir, bu metriğe ***discrete metrik*** denir.

Örnek 2.1.6: $V_n(\text{¡})$ 'de, reel değerli bir d fonksiyonu şöyle tanımlansın, $\forall\ x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, $y=(y_1,y_2,\ldots,y_n)\in V_n(\text{¡})$ için,

$$d(x,y)=\max\{|x_i-y_i|:i=1,2,\ldots,n\}.$$

Böylece, $(V_n(\text{¡}),d)$ bir metrik uzaydır.

Örnek 2.1.6: $C[a,b]$ 'de $d(f,g)=\max\{|f(x)-g(x)|:x\in[a,b]\}$ olsun. Bu durumda $(C[a,b],d)$ bir metrik uzaydır.

Eğer $(X,\|\,.\,\|)$ bir normlu vektör uzayı ise, $d(x,y)=\|x-y\|$ bir metrik tanımlar. Böylece bir normlu lineer uzay tanımlanan d metriği ile daima bir metrik uzay gibi değerlendirilebilir.

Bir metrik uzayda (ve dolayısıyla bir normlu vektör uzayında), dizilerin yakınsaklığı, Cauchy dizileri ve tamlık aşağıdaki şekilde tanımlanır.

Tanım 2.1.5: $\{x_n\}$, (X,d) metrik uzayında bir dizi olsun. Eğer $\forall e>0$ ve $\forall n\geq N$ için $d(x_n,x)<e$ olacak biçimde bir $N=N(e)$ tam sayısı varsa $\{x_n\}$ dizisine, x noktasına yakınsıyor denir.

Tanım 2.1.6: $\{x_n\}$, (X,d) metrik uzayında bir dizi olsun. Eğer $\forall e>0$ ve $\forall m,n\geq N$ için $d(x_n,x_m)<e$ olacak biçimde bir $N=N(e)$ tam sayısı varsa $\{x_n\}$ dizisine bir ***Cauchy dizisi*** denir.

Her yakınsak dizi bir Cauchy dizisidir.

Tanım 2.1.7: X ’deki her bir Cauchy dizisi bir noktaya yakınsıyor ise (X,d) metrik uzayına ***tamdır*** denir.

Tanım 2.1.8: Eğer bir $(X,\|\,.\,\|)$ normlu lineer uzayı bir metrik uzay gibi tam ise, buna bir ***Banach uzayı*** denir.

Örnek 2.1.8: Örnek 2.1.3 deki $(V_n(¡),\|\,.\,\|)$ normlu lineer uzayı aynı zamanda bir Banach uzayıdır.

Örnek 2.1.9: Örnek 2.1.4 $(C[a,b],\|\,.\,\|)$ normlu lineer uzayı aynı zamanda bir Banach uzayıdır.

Tanım 2.1.9: (X_1,d_1) ve (X_2,d_2) iki metrik uzay olsun. X_1 ’den X_2 ’ye tanımlı *f* fonksiyonu $\forall x,y\in X_1$ için,

$$d_2(f(x),f(y))=d_1(x,y)$$

eşitliğini sağlıyor ise *f* ’e bir izometri denir. Eğer X_1 ’den X_2 ’ye örten bir izometri var ise (X_1,d_1) ve (X_2,d_2) metrik uzaylarına ***izometriktirler*** denir.

İzometrinin bir uygulaması da kimi kümelerde metrik tanımlamak için bir metot olarak önerilir. (X_2,d_2) bir metrik uzay, X_1 bir küme ve *f*, X_1 ’den X_2 ’ye bire-bir ve örten bir fonksiyon olsun. Eğer $\forall x,y\in X_1$ için $d_1(x,y)=d_2(f(x),f(y))$ ise (X_1,d_1) bir metrik uzaydır.

Tanım 2.1.10: X bir lineer uzay olsun. $X\times X$ ’den K ’ya tanımlı, aşağıdaki koşulları sağlayan, skaler değerli, $(x,y)\to(x|y)$ fonksiyonuna X lineer uzayı üzerinde bir ***iç çarpım*** denir.

$\forall x,y,z\in X$ ve $a\in K$ için, kompleks eşlenik $\overline{(x|y)}$ şeklinde gösterilirken,

(I_1) $(x|y)\geq 0$, $(x|y)=0$ ancak ve ancak $x=0$ ise sağlanabilir,

(I_2) $(x|y)=\overline{(y|x)}$,

(I_3) $(x+y|z)=(x|z)+(y|z)$,

(I_4) $(a\,x|y) = a\,(x|y)$.

Üzerinde bir $(\cdot|\cdot)$ iç çarpımı tanımlı olan X vektör uzayına bir ***iç çarpım uzayı*** (veya ***pre-Hilbert uzayı***) denir ve $(X,(\cdot|\cdot))$ biçiminde gösterilir.

Teorem 2.1.1: Eğer $(X,(\cdot|\cdot))$ bir iç çarpım uzayı ise $\|x\| = \sqrt{(x|x)}$ X üzerinde bir norm tanımlar.

Teorem 2.1.2: Eğer $(X,(\cdot|\cdot))$ bir iç çarpım uzayı ise $\forall x, y \in X$ için $|(x|y)| \le \|x\|\|y\|$ dir, eşitlik ancak ve ancak x ve y lineer bağımsız iken sağlanır.

Teorem 2.1.2 ’deki eşitsizlik ***Schwartz eşitsizliği, Cauchy eşitsizliği, Cauchy-Schwartz eşitsizliği veya Cauchy-Bunyakovski-Schwartz*** eşitsizliği olarak da bilinir.

Teorem 2.1.3: Eğer $(X,(\cdot|\cdot))$ bir iç çarpım uzayı ise $(\cdot|\cdot)$ iç çarpımı $X \times X$ ’de sürekli bir fonksiyondur.

Teorem 2.1.1 ’den biliniyor ki bir iç çarpım uzayı, $\|x\| = \sqrt{(x|x)}$ şeklinde tanımlanan norm ile birlikte, bir normlu lineer uzay gibi göz önüne alınabilir. Bu norm $(\cdot|\cdot)$ iç çarpımın verdiği norm olarak adlandırılır.

Tanım 2.1.11: Eğer bir iç çarpım uzayı iç çarpımdan elde edilen norma göre tam ise bu uzay bir ***Hilbert uzayı*** olarak adlandırılır.

Örnek 2.1.10: $V_n(\mathbb{R})$ vektör uzayında bir iç çarpım, her $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in V_n(\mathbb{R})$ için $(x|x) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n$ şeklinde tanımlansın. $(\mathrm{I}_1) - (\mathrm{I}_4)$ koşullarının sağlandığı kolaylıkla görülebilir ve iç çarpımdan aynı Örnek 2.1.3 ’deki gibi bir norm elde edilebilir. Böylece $(V_n(\mathbb{R}), \|\cdot\|)$ bir ***reel Hilbert uzayıdır.***

Örnek 2.1.11: $C[a,b]$ vektör uzayında, bir iç çarpım, $\forall f,g \in C[a,b]$ için $(f|g) = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}dx$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda $(C[a,b],(\cdot|\cdot))$ bir iç çarpım uzayıdır fakat tam değildir ve böylece bir Hilbert uzayı değildir.

Teorem 2.1.4: Eğer $(X,\|\,.\,\|)$ normlu vektör uzayı bir iç çarpım uzay ise norm Paralelkenar Kuralını sağlar, $\forall x,y \in X$ için,

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right).$$

Ayrıca Paralelkenar Kuralı bir normlu lineer uzayda sağlanıyor ise bu uzay bir iç çarpım uzayıdır.

Tanım 2.1.12: *C*, bir *X* vektör uzayının bir alt kümesi olsun. Eğer $x,y \in C$ ve $t \in [0,1]$ için $tx + (1-t) \in C$ oluyorsa C 'ye ***konveks*** denir.

Tanım 2.1.13: Eğer *E*, *X* lineer uzayının bir alt kümesi ise, E 'yi içeren en küçük *A* konveks kümesine E 'nin ***konveks kabuğu*** denir ve conv *E* şeklinde gösterilir.

Teorem 2.1.5: : Eğer *E*, *X* lineer uzayının bir alt kümesi ise,

$$\text{conv}\, E = \left\{ z : z = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i,\ a_i \geq 0,\ \sum_{i=1}^{n} a_i = 1,\ x_i \in E \right\}$$

dir.

Tanım 2.1.14: *X*, *K* üzerinde bir lineer uzay ve *E*, *X* 'in bir alt kümesi olsun.

(1) Eğer $E = -E = \{-x : x \in E\}$ ise E 'ye simetriktir denir.

(2) Eğer her $x \in E$ için $|t| \leq t_x$ iken $t_x \in E$ olacak biçimde bir $t_x > 0$ varsa E 'ye absorbing (veya absorbent) denir.

(3) Eğer $tE = \{tx : x \in X,\ t \in K,\ |t| \leq 1\} \subset E$ ise E 'ye balanced denir.

(4) Eğer $tE + (1-t)E = \{tx + (1-t)y : x,y \in E,\ t \in [0,1]\} \subset E$ ise E 'ye affine denir.

(5) Eğer $E=\{tx+(1-t)y : x,y\in E,\ t\in R\}$ ise E 'ye x ve y 'den geçen doğru denir.

(6) Eğer $E=\{tx+(1-t)y : x,y\in E,\ t\in[0,1]\}$ ise E 'ye x ve y 'yi birleştiren doğru parçası denir.

Örnek 2.1.13: $X=\mathbb{R}^2=\{(x_1,x_2): x_1,x_2\in\mathbb{R}\}$ ve $E=\{(x_1,x_2): x_1^2+x_2^2=1\}$ alınsın. X 'in simetrik ve absorbing olduğu kolaylıkla görülür. Açıkça, E konveks değildir.

Örnek 2.1.14: X, bir kompakt Hausdorf uzayı ve $C(x)$, X 'deki tüm reel değerli fonksiyonların kümesi olsun. Bu durumda $C(x)$ açıkça konveks ve balanced olur.

X, K üzerinde bir lineer uzay olsun. X üzerindeki fonksiyonların önemli bir sınıfı aşağıdaki tanımla ele alınır.

Tanım 2.1.15: Aşağıdaki koşulları sağlayan reel değerli $p: X\to\mathbb{R}$ fonksiyonuna ***yarı-norm*** denir:

(1) $p(x)\geq 0$

(2) $p(x+y)\leq p(x)+p(y)$

(3) Her $x,y\in X$ ve her $a\in\mathbb{R}$ için $p(a\,x)=|a|\,p(x)$

Eğer, $p(x)=0$ ancak ve ancak $x=0$, olursa yarı-norma, norm denir.

Eğer X, K üzerinde bir vektör uzayı ve p, X üzerinde bir yarı-norm ise $B_p(0,1)=\{x: p(x)<1\}$ kümesi açıkça konveks, simetrik, balanced ve absorbing olur.

Aşağıdaki teorem balanced, absorbing ve yarı-norm olan konveks kümeler arasındaki ilişkiyi verir.

Teorem 2.1.6: X, K üzerinde bir vektör uzayı ve E kümesi X 'in bir alt kümesi olsun. E kümesi aşağıdaki koşulları sağlasın:

(a) E konveks,

(b) E balanced ve absorbing.

Bu durumda X üzerindeki $p_E(x)=\inf\{t>0: x\in tE\}$ şeklinde tanımlı p_E fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlar.

(1) $p_E(x)\geq 0$,

(2) $p_E(x+y)=p_E(x)+p_E(y)$,

(3) $p_E(a\,x)=|a|\,p_E(E)$,

(4) $\{x: p_E(x)<1\}\subset E\subset\{x: p_E(x)\leq 1\}$

Tanım 2.1.16: $X\neq\varnothing$ bir küme olsun. X 'in bir alt kümeler topluluğu t ile gösterilsin. Eğer t aşağıdaki koşulları sağlarsa t 'ya X üzerinde bir ***topoloji*** denir.

(1) $X\in t, \varnothing\in t$,

(2) t 'nun herhangi bir ailesinin birleşimi yine t 'dadır,

(3) Eğer $O_1, \mathbf{K}, O_m\in t$ ise $O_1\cap O_2\cap\mathbf{K}\cap O_m\in t$

(X,t) ikilisine bir ***topolojik uzay*** denir. Kısaca X 'e bir topolojik uzay denir. t 'nun elemanlarına ise açık küme denir.

Tanım 2.1.17: Bir $x\in X$ için, $x\in O$ olacak biçimde $O\in t$ kümesini içeren X 'in herhangi bir alt kümesine ***x 'in komşuluğu*** denir. Burada O açık kümeyi gösterir.

Tanım 2.1.18: X_1 ve X_2 iki topolojik uzay ve $f: X_1\to X_2$ tanımlı bir fonksiyon olsun. Eğer $f(x_1)$ 'in herhangi bir N_2 komşuluğu için, $x_1\in N_1$ iken $f(x_1)\in N_2$ olacak biçimde x_1 'in bir N_1 komşuluğu var ise o zaman f fonksiyonu x_1 noktasında ***süreklidir*** denir.

Tanım 2.1.19: X, K üzerinde bir vektör uzayı olsun. X üzerindeki bir t topolojisine göre $+: X\times X\to X$ ve $\cdot: K\times X\to X$ fonksiyonları sürekli ise bu X uzayına ***topolojik vektör uzayı*** veya ***lineer topolojik uzay*** denir. Bu koşullar altında t 'ya X üzerinde bir ***lineer topoloji*** denir.

Tanım 2.1.20: X topolojik vektör uzayı üzerinde bir lineer topoloji alınsın. Eğer 0 (sıfır) 'ın her komşuluğu 0 'ın bir konveks komşuluğunu içeriyorsa bu lineer topolojiye ***yerel konveks topoloji*** denir.

Teorem 2.1.7: Eğer X, K cismi üzerinde bir yerel konveks uzay ise o zaman X 'in topolojisi, yarı-normların bir $(p_i)_{i\in I}$ ailesi tarafından belirlenir.

2.2 2-Norm

Tanım 2.2.1: X bir vektör uzayı ve $\|\cdot,\cdot\|$, $X\times X$ üzerinde tanımlı reel değerli bir fonksiyon olsun. $x, y, z\in X$ ve $a\in R$ olmak üzere,

(2N1): $\|x, y\|\geq 0$, $\|x, y\| = 0$ ancak ve ancak x ve y lineer bağımlıysa,

(2N2): $\|x, y\| = \|y, x\|$,

(2N3): $\|a\, x, y\| = |a|\,\|x, y\|$,

(2N4): $\|x, y+z\|\leq \|x, y\| + \|x, z\|$,

koşullarını sağlayan $\|\cdot,\cdot\|$ fonksiyonuna ***2-norm*** ve $\left(X, \|\cdot,\cdot\|\right)$ ikilisine de ***2-normlu lineer uzay*** veya ***2-normlu vektör uzay*** yada kısaca ***2-normlu uzay*** denir. $\|\cdot,\cdot\|$ negatif olmayan bir fonksiyondur.

Örnek 2.2.1: $X = \mathbb{R}^3$ ve $x = \left(x_1, x_2, x_3\right)$, $y = \left(y_1, y_2, y_3\right)$ iken X üzerinde 2-norm

$$\|x, y\| = |x\times y| = \left|\det\begin{pmatrix} i & j & k \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}\right|$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda $\left(X, \|\cdot,\cdot\|\right)$ ikilisinin bir 2-normlu uzaydır. Gerçekten:

(2N1): $x, y\in X$ ve x ile y lineer bağımlı olsun, bu durumda bir $k\in \mathbb{R}$ için $y = kx$ olur, yani $y = \left(y_1, y_2, y_3\right) = \left(kx_1, kx_2, kx_3\right)$ dir. Böylece,

$$\|x, y\| = |x\times y| = \left|\det\begin{pmatrix} i & j & k \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}\right| = \left|\det\begin{pmatrix} i & j & k \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ kx_1 & kx_2 & kx_3 \end{pmatrix}\right| = 0$$

elde edilir.

Şimdi $\|x, y\| = 0$ olsun. Bu durumda,

$$\|x, y\| = |x \times y| = \left|\det\begin{pmatrix} i & j & k \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}\right| = 0$$

olduğundan $k \in \mathbb{R}$ için $y = kx$ olmalıdır. Böylece x ile y lineer bağımlı olurlar.

(2N2): $x, y \in X$ olsun,

$$\|x, y\| = |x \times y| = \left|\det\begin{pmatrix} i & j & k \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}\right|$$

$$= \left|-\det\begin{pmatrix} i & j & k \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}\right|$$

$$= \left|\det\begin{pmatrix} i & j & k \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}\right|$$

$$= |y \times x| = \|y, x\|.$$

(2N3): $x, y \in X$ ve $a \in \mathbb{R}$ olsun,

$$\|a\,x, y\| = |a\,x \times y| = \left|\det\begin{pmatrix} i & j & k \\ a\,x_1 & a\,x_2 & a\,x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}\right|$$

$$= \left|a\,\det\begin{pmatrix} i & j & k \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}\right|$$

$$= |a|\left|\det\begin{pmatrix} i & j & k \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}\right|$$

$$=|a|\|x,y\|.$$

(2N4): $x,y,z\in X$ olsun,

$$\|x,y+z\|=|x\times(y+z)|=\left|\det\begin{pmatrix} i & j & k\\ x_1 & x_2 & x_3\\ y_1+z_1 & y_2+z_2 & y_3+z_3\end{pmatrix}\right|$$

$$=\left|\det\begin{pmatrix} i & j & k\\ x_1 & x_2 & x_3\\ y_1 & y_2 & y_3\end{pmatrix}+\det\begin{pmatrix} i & j & k\\ x_1 & x_2 & x_3\\ z_1 & z_2 & z_3\end{pmatrix}\right|$$

$$\leq\left|\det\begin{pmatrix} i & j & k\\ x_1 & x_2 & x_3\\ y_1 & y_2 & y_3\end{pmatrix}\right|+\left|\det\begin{pmatrix} i & j & k\\ x_1 & x_2 & x_3\\ z_1 & z_2 & z_3\end{pmatrix}\right|$$

$$\leq\|x,y\|+\|x,z\|.$$

Sonuç olarak, (2N1)-(2N4) koşulları sağlandığından, $(X,\|\cdot,\cdot\|)$ ikilisi bir 2-normlu uzaydır.

Örnek 2.2.2: $[0,1]$ aralığı üzerinde derecesi $\leq$ n olan reel polinomların kümesi P_n ile gösterilsin. P_n bilinen toplama ve skaler ile çarpma işlemleri ile reel sayılar üzerinde bir lineer vektör uzayıdır. $\{x_1,x_2,...,x_{2n}\}$ $[0,1]$ 'de ayrık, sabitlenmiş noktalar olsun ve P_n üzerinde 2-norm,

$$\|f,g\|=\sum_{k=1}^{2n}\left|f(x_k).g'(x_k)-f'(x_k).g(x_k)\right|$$

biçiminde tanımlansın. Bu durumda $(P_n,\|\cdot,\cdot\|)$ ikilisinin bir 2-normlu uzaydır. Gerçekten:

(2N1): $f,g\in P_n$ olsun. f ve g lineer bağımlı ise, $g=kf$ olur. Bu durumda $g'=kf'$ dir.

$$\|f,g\|=\sum_{k=1}^{2n}\left|f(x_k).g'(x_k)-f'(x_k).g(x_k)\right|$$

$$=\sum_{k=1}^{2n}\left| f(x_k).kf'(x_k)-f'(x_k).kf(x_k)\right|=0$$

Şimdi $\|f,g\|=0$ alınsın. $g\neq 0$ olsun,

$$\|f,g\|=\sum_{k=1}^{2n}\left| f(x_k).g'(x_k)-f'(x_k).g(x_k)\right|=0$$

olur. Buradan her $k=1,2,...,2n$ için

$$f(x_k).g'(x_k)-f'(x_k).g(x_k)=0$$

elde edilir. Böylece, sol taraf $f(x)g'(x)-f(x)'g(x)=P(x)$ biçiminde gösterilirse, $P(x)$ polinomunun 2n tane sıfırı (kökü) vardır. Oysa bu polinom 2n-1 inci derecedendir. O halde $P(x)=0$ olur. $fg'-f'g=0$. Öte yandan $\left(\dfrac{f}{g}\right)'=\dfrac{f'g-fg'}{g^2}=0$ olduğundan $\dfrac{f}{g}=k$ (sabit) olur. Buradan $f=kg$ olur ve böylece f ile g lineer bağımlı olurlar.

(2N2): $f,g\in P_n$ olsun.

$$\begin{aligned}\|f,g\|&=\sum_{k=1}^{2n}\left| f(x_k).g'(x_k)-f'(x_k).g(x_k)\right|\\&=\sum_{k=1}^{2n}\left|-\left(f'(x_k).g(x_k)-f(x_k).g'(x_k)\right)\right|\\&=\sum_{k=1}^{2n}\left|g(x_k).f'(x_k)-g'(x_k).f(x_k)\right|\\&=\|g,f\|\end{aligned}$$

(2N3): $f,g\in P_n$ ve $a\in \mathbb{R}$ olsun.

$$\begin{aligned}\|a f,g\|&=\sum_{k=1}^{2n}\left|a f(x_k).g'(x_k)-a f'(x_k).g(x_k)\right|\\&=\sum_{k=1}^{2n}\left|a\left(f(x_k).g'(x_k)-f'(x_k).g(x_k)\right)\right|\\&=|a|\sum_{k=1}^{2n}\left|\left(f(x_k).g'(x_k)-f'(x_k).g(x_k)\right)\right|\end{aligned}$$

$$=|a|\|f,g\|$$

(2N4): $f,g,h\in P_n$ olsun.

$$\begin{aligned}
\|f,g+h\| &= \sum_{k=1}^{2n}\left| f(x_k).\left(g(x_k)+h(x_k)\right)' - f'(x_k).\left(g(x_k)+h(x_k)\right)\right| \\
&= \sum_{k=1}^{2n}\left| f(x_k).g'(x_k)+f(x_k).h'(x_k)-f'(x_k).g(x_k)-f'(x_k).h(x_k)\right| \\
&= \sum_{k=1}^{2n}\left|\left(f(x_k).g'(x_k)-f'(x_k).g(x_k)\right)+\left(f(x_k).h'(x_k)-f'(x_k).h(x_k)\right)\right| \\
&\le \sum_{k=1}^{2n}\left|\left(f(x_k).g'(x_k)-f'(x_k).g(x_k)\right)\right|+\sum_{k=1}^{2n}\left|f(x_k).h'(x_k)-f'(x_k).h(x_k)\right| \\
&\le \|f,g\|+\|f,h\|
\end{aligned}$$

Sonuç olarak, (2N1)-(2N4) koşulları sağlandığından, $\left(P_n,\|\cdot,\cdot\|\right)$ ikilisi bir 2-normlu uzaydır.

Örnek 2.2.3: $\left(X,\|\cdot,\cdot\|\right)$ ikilisi bir 2-normlu uzay olsun, $x,y,z\in X$ için,

$$\|x+z,y+z\|\le\|x,y\|+\|y,z\|+\|z,x\|$$

dir. Bunun gösterilmesi için 2-norm ’un (2N4) özelliğini kullanmak yeterli olacaktır.

$$\begin{aligned}
\|x+z,y+z\| &\le \|x,y+z\|+\|z,y+z\| \\
&\le \|x,y\|+\|x,z\|+\|z,y\|+\|z,z\| \\
&= \|x,y\|+\|y,z\|+\|z,x\|
\end{aligned}$$

Örnek 2.2.4: $X=\mathbb{R}^3$ olsun. $x=(a_1,b_1,c_1)$, $y=(a_2,b_2,c_2)$ X ’in elemanları iken

$$\|x,y\|=|b_1c_2-b_2c_1|+|a_1c_2-a_2c_1|+|a_1b_2-a_2b_1|$$

biçiminde tanımlanan fonksiyonun bir 2-normdur. Gerçekten:

(2N1): $x,y\in X$ olsun. Eğer bazı a reel sayıları için $y=a\,x$ ise,

$$\begin{aligned}
\|x,y\| &= |b_1(a\,c_1)-(a\,b_1)c_1|+|a_1(a\,c_1)-(a\,a_1)c_1|+|a_1(a\,b_1)-(a\,a_1)b_1| \\
&= |a\,(b_1c_1-b_1c_1)|+|a\,(a_1c_1-a_1c_1)|+|a\,(a_1b_1-a_1b_1)| \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Tersine, eğer $\|x,y\|=0$ ise x ile y 'nin lineer bağımsızlığı gösterilmelidir. Eğer $\|x,y\|=0$ ise $|b_1c_2-b_2c_1|+|a_1c_2-a_2c_1|+|a_1b_2-a_2b_1|=0$ olur. Mutlak değer negatif olmadığından $b_1c_2-b_2c_1=0$, $a_1c_2-a_2c_1=0$ ve $a_1b_2-a_2b_1=0$ olmalıdır. Eğer $c_2\neq 0$ ise $a_1=(c_1/c_2)a_2$, $b_1=(c_1/c_2)b_2$ ve $c_1=(c_1/c_2)c_2$ olur. Burada $a=c_1/c_2$ alınırsa $x=a\,y$ olur. Eğer $c_2=0$ ise cebirsel işlemlerin sonucu olarak ya $x=(a_1,b_1,0)$ ve $y=(0,0,0)$ ya da $x=((b_1/b_2)a_2,(b_1/b_2)b_2,0)$ ve $y=(a_2,b_2,0)$ olur. Sonuç olarak x ile y lineer bağımlıdır.

(2N2): $x,y\in X$ olsun.

$$\begin{aligned}\|x,y\| &= |b_1c_2-b_2c_1|+|a_1c_2-a_2c_1|+|a_1b_2-a_2b_1|\\ &= |b_2c_1-b_1c_2|+|a_2c_1-a_1c_2|+|a_2b_1-a_1b_2|\\ &= \|y,x\|.\end{aligned}$$

(2N3): $x,y\in X$ ve $l\in$ ¡ olsun.

$$\begin{aligned}\|x,y\| &= |b_1(l\,c_2)-(l\,b_2)c_1|+|a_1(l\,c_2)-(l\,a_2)c_1|+|a_1(l\,b_2)-(l\,a_2)b_1|\\ &= |l\,(b_1c_2-b_2c_1)|+|l\,(a_1c_2-a_2c_1)|+|l\,(a_1b_2-a_2b_1)|\\ &= |l|\left(|b_1c_2-b_2c_1|+|a_1c_2-a_2c_1|+|a_1b_2-a_2b_1|\right)\\ &= |l|\,\|x,y\|.\end{aligned}$$

(2N4): $x,y,z\in X$ ve $z=(a_3,b_3,c_3)$ olsun.

$$\begin{aligned}\|x,y+z\| &= |b_1(c_2+c_3)-(b_2+b_3)c_1|+|a_1(c_2+c_3)-(a_2+a_3)c_1|\\ &\quad +|a_1(b_2+b_3)-(a_2+a_3)b_1|\\ &= |(b_1c_2-b_2c_1)+(b_1c_3-b_3c_1)|+|(a_1c_2-a_2c_1)+(a_1c_3-a_3c_1)|\\ &\quad +|(a_1b_2-a_2b_3)+(a_1b_3-a_3b_1)|\\ &\leq |b_1c_2-b_2c_1|+|b_1c_3-b_3c_1|+|a_1c_2-a_2c_1|+|a_1c_3-a_3c_1|\\ &\quad +|a_1b_2-a_2b_3|+|a_1b_3-a_3b_1|\\ &= \|x,z\|+\|y,z\|.\end{aligned}$$

Sonuç olarak, (2N1)-(2N4) koşulları sağlandığından, $(P_n,\|\cdot,\cdot\|)$ ikilisi bir 2-normlu uzaydır.

3. 2-BANACH UZAYI

3.1 Cauchy Dizisi

Tanım 3.1.1: $\{x_n\}$, 2-normlu X uzayında bir dizi olsun. Eğer $\lim_{m,n\to\infty}\|x_n - x_m, y\| = 0$ ve $\lim_{m,n\to\infty}\|x_n - x_m, z\| = 0$ olacak biçimde X 'de lineer bağımsız iki y ve z vektörü varsa $\{x_n\}$ dizisine y ve z 'ye göre bir ***Cauchy dizisi*** denir.

Teorem 3.1.1: X bir 2-normlu vektör uzay olsun.

i) Eğer $\{x_n\}$ X 'de a ve b 'ye göre bir Cauchy dizisi ise

$$\{\|x_n, a\|\} \text{ ve } \{\|x_n, b\|\}$$

reel Cauchy dizileridir.

ii) Eğer $\{x_n\}$ ve $\{y_n\}$ X 'de a ve b 'ye göre Cauchy dizileri ve $\{a_n\}$ bir reel Cauchy dizisi ise $\{x_n + y_n\}$ ve $\{a_n x_n\}$ dizileri de X 'de Cauchy dizileridir.

İspat:

i) (2N4) özelliğinden,

$$\begin{aligned}\|x_n, a\| &= \|(x_n - x_m) + x_m, a\|\\ &\leq \|x_n - x_m, a\| + \|x_m, a\|\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\|x_n, a\| - \|x_m, a\| \leq \|x_n - x_m, a\|$$

olur. Benzer olarak,

$$\|x_m, a\| - \|x_n, a\| \leq \|x_n - x_m, a\|$$

veya

$$-\|x_n - x_m, a\| \leq \|x_n, a\| - \|x_m, a\|$$

olur. Böylece

$$\left\|\|x_n,a\|-\|x_m,a\|\right\| \le \|x_n-x_m,a\|$$

elde edilir. Hipoteze göre $\{x_n\}$ bir Cauchy dizisi olduğundan

$$\lim_{m,n\to\infty}\left\|\|x_n,a\|-\|x_m,a\|\right\| \le \lim_{m,n\to\infty}\|x_n-x_m,a\|=0$$

olur ve böylece $\{\|x_n,a\|\}$ bir reel Cauchy dizisidir. Benzer şekilde $\{\|x_n,b\|\}$ de bir reel Cauchy dizisidir.

ii)

$$\begin{aligned}\|(x_n+y_n)-(x_m+y_m),a\| &= \|(x_n-x_m)+(y_n-y_m),a\|\\ &\le \|x_n-x_m,a\|+\|y_n-y_m,a\|\end{aligned}$$

bulunur. Burada limite geçildiğinde hipotezden sağ taraf 0 bulunur. Bu yüzden sol tarafında limiti 0 olur. Benzer işlemlerle

$$\lim_{m,n\to\infty}\|(x_n+y_n)-(x_m+y_m),b\|=0$$

bulunur. Bu yüzden tanımdan dolayı $\{x_n+y_n\}$ dizisi X 'de bir Cauchy dizisidir.

Şimdi $\{a_n x_n\}$ dizisini inceleyelim,

$$\begin{aligned}\|a_n x_n-a_m x_m,a\| &= \|(a_n x_n-a_n x_m)+(a_n x_m-a_m x_m),a\|\\ &\le \|a_n x_n-a_n x_m,a\|+\|a_n x_m-a_m x_m,a\|\\ &= |a_n|\|x_n-x_m,a\|+|a_n-a_m|\|x_m,a\|\\ &\le k_1\|x_n-x_m,a\|+k_2|a_n-a_m|\end{aligned}$$

burada $\{a_n\}$ ve $\{\|x_n,a\|\}$ reel Cauchy dizileri olduğundan sınırlıdırlar. Bundan dolayı önce $|a_n|\le k_1$ ve $\|x_m,a\|\le k_2$ yazıldı. Ayrıca, yine Cauchy dizileri olmaları nedeniyle $\|x_n-x_m,a\|\to 0$ ve $|a_n-a_m|\to 0$ olur ve böylece sağ taraf 0 olur. O halde

$$\lim_{m,n\to\infty}\|a_n x_n-a_m x_m,a\|=0$$

elde edilir. Benzer olarak,

$$\lim_{m,n\to\infty}\|a_n x_n-a_m x_m,b\|=0$$

bulunur. Bu yüzden $\{a_n x_n\}$, X 'de bir Cauchy dizisidir.

Tanım 3.1.2: $\{x_n\}$, 2-normlu X uzayında bir dizi olsun. Eğer her $y \in X$ için $\lim_{n\to\infty}\|x_n - x, y\| = 0$ olacak biçimde bir $x \in X$ varsa, $\{x_n\}$ 'e ***yakınsak dizi*** denir. Eğer $\{x_n\}$, x 'e yakınsıyor ise $x_n \to x$ şeklinde yazılır ve $\{x_n\}$ ***'in limiti x 'dir*** denir.

3.2 2-Banach Uzayı

Tanım 3.2.1: Bir lineer 2-normlu uzayda her Cauchy dizisi yakınsak ise bu uzaya ***2-Banach uzayı*** denir.

Teorem 3.2.1: Herhangi bir 2-normlu X uzayında

i) $x_n \to x$ ve $y_n \to y$ ise $x_n + y_n \to x + y$ dir,

ii) $x_n \to x$ ve $a_n \to a$ ise $a_n x_n \to a\,x$ dir,

iii) $\dim X \geq 2$, $x_n \to x$ ve $x_n \to y$ ise $x = y$ dir.

İspat:

i)

$$\begin{aligned}\|(x_n + y_n) - (x + y), a\| &= \|(x_n - x) + (y_n - y), a\| \\ &\leq \|x_n - x, a\| + \|y_n - y, a\| \to 0.\end{aligned}$$

Böylece $x_n + y_n \to x + y$ olur.

ii)

$$\begin{aligned}\|a_n x_n - a\,x, a\| &= \|a_n x_n - a_n x + a_n x - a\,x, a\| \\ &\leq \|a_n x_n - a_n x, a\| + \|a_n x - a\,x, a\| \\ &= |a_n|\,\|x_n - x, a\| + |a_n - a|\,\|x, a\| \\ &\leq k\|x_n - x, a\| + |a_n - a|\,\|x, a\|.\end{aligned}$$

Burada $\lim_{n\to\infty}\|x_n - x, a\| = 0$ ve $\lim_{n\to\infty}\|a_n - a\| = 0$ olduğundan eşitsizliğin sol tarafı da 0 olur. Böylece $a_n x_n \to a\,x$ olur.

iii)

$$\begin{aligned}\|x-y,a\| &= \|(x_n-y)-(x_n-x),a\| \\ &\leq \|x_n-y,a\|+\|-(x_n-x),a\|.\end{aligned}$$

Burada $x_n \to x$ ve $x_n \to y$ olduğundan her $a \in X$ için $\|x-y,a\|$=0 olur. Böylece her $a \in X$ için $x-y$ ve a lineer bağımlı olurlar. $\dim X \geq 2$ olduğundan $x-y$ nin bütün $a \in X$ vektörleriyle lineer bağımsız olabilmesi için tek yol $x-y=0$ olmasıdır.

Örnek 3.2.1: $\mathbb{R}^3$, üç boyutlu Öklid uzayını göstersin. $x,y \in \mathbb{R}^3$ olacak biçimde $x=ai+bj+ck$ ve $y=di+ej+fk$ alalım. $\mathbb{R}^3$'de 2-norm,

$$\begin{aligned}\|x,y\| = |x\times y| &= \left|\det\begin{pmatrix} i & j & k \\ a & b & c \\ d & e & f\end{pmatrix}\right| \\ &= \left|(bf-ce)i+(cd-af)j+(ae-db)k\right| \\ &= \left[(bf-ce)^2+(cd-af)^2+(ae-db)^2\right]^{1/2}\end{aligned}$$

biçiminde tanımlansın. Bu durumda $(\mathbb{R}^3,\|\cdot,\cdot\|)$ ikilisinin bir 2-Banach uzayı olduğu gösterilsin.

Örnek 2.2.1 'den $\|x,y\|$ fonksiyonunun bir 2-norm ve $(E_3,\|\cdot,\cdot\|)$ 'nin bir 2-normlu uzay olduğu biliniyor. Şimdi bu 2-normlu uzaydaki her Cauchy dizisinin yakınsak olduğu gösterilsin.

$x_n = a_n i + b_n j + c_n k$ $\mathbb{R}^3$ 'de bir Cauchy dizisi olsun. Böylece $\mathbb{R}^3$ 'de $\lim_{m,n\to\infty}|(x_n-x_m)\times y|=0$ ve $\lim_{m,n\to\infty}|(x_n-x_m)\times z|=0$ olacak biçimde lineer bağımsız olan $y=di+ej+fk$ ve $z=pi+qj+rk$ vektörleri vardır. $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ ve $\{c_n\}$ 'in birer Cauchy dizisi oldukları gösterilsin.

$$\left|(x_n - x_m)\times y\right| = \left|\det\begin{pmatrix} i & j & k \\ a_n - a_m & b_n - b_m & c_n - c_m \\ d & e & f \end{pmatrix}\right|$$

$$= \Big[\left[f(b_n - b_m) - e(c_n - c_m)\right]^2 + \left[d(c_n - c_m) - f(a_n - a_m)\right]^2$$

$$+ \left[e(a_n - a_m) - d(b_n - b_m)\right]^2 \Big]^{1/2}.$$

Böylece $\lim\limits_{m,n\to\infty} \left|(x_n - x_m)\times y\right| = 0$ ancak ve ancak

$$a:\ \lim_{m,n\to\infty}\left[f(b_n - b_m) - e(c_n - c_m)\right] = 0,$$

$$b:\ \lim_{m,n\to\infty}\left[d(c_n - c_m) - f(a_n - a_m)\right] = 0,$$

$$g:\ \lim_{m,n\to\infty}\left[e(a_n - a_m) - d(b_n - b_m)\right] = 0,$$

olması ile mümkündür.

$$\left|(x_n - x_m)\times z\right| = \Big[\left[r(b_n - b_m) - q(c_n - c_m)\right]^2 + \left[p(c_n - c_m) - r(a_n - a_m)\right]^2$$

$$+ \left[q(a_n - a_m) - p(b_n - b_m)\right]^2 \Big]^{1/2}.$$

Böylece $\lim\limits_{m,n\to\infty} \left|(x_n - x_m)\times z\right| = 0$ ancak ve ancak

$$d:\ \lim_{m,n\to\infty}\left[r(b_n - b_m) - q(c_n - c_m)\right] = 0,$$

$$e:\ \lim_{m,n\to\infty}\left[p(c_n - c_m) - r(a_n - a_m)\right] = 0,$$

$$z:\ \lim_{m,n\to\infty}\left[q(a_n - a_m) - p(b_n - b_m)\right] = 0,$$

olması ile mümkündür.

d ’da her iki taraf $-f$ ile çarpılırsa,

$$\lim_{m,n\to\infty}\left[-rf(b_n - b_m) + qf(c_n - c_m)\right] = 0$$

ve a ’da her iki taraf r ile çarpılırsa,

$$\lim_{m,n\to\infty}\left[rf(b_n - b_m) - re(c_n - c_m)\right] = 0$$

elde edilir. Taraf tarafa toplanırsa,

$$\lim_{m,n\to\infty}\left[(qf - re)(c_n - c_m)\right] = 0$$

bulunur.

b ’da her iki taraf r ile çarpılırsa,

$$\lim_{m,n\to\infty}\left[rd\left(c_n-c_m\right)-rf\left(a_n-a_m\right)\right]=0$$

ve e ’da her iki taraf $-f$ ile çarpılırsa,

$$\lim_{m,n\to\infty}\left[-pf\left(c_n-c_m\right)+rf\left(a_n-a_m\right)\right]=0$$

elde edilir. Bu son ikisinin taraf tarafa toplanmasıyla,

$$\lim_{m,n\to\infty}\left[\left(rd-pf\right)\left(c_n-c_m\right)\right]=0$$

bulunur.

Şimdi $\{c_n\}$ ’in bir Cauchy dizisi olmadığı varsayılsın. Bu durumda $qf=re$ ve $rd=pf$ olur, buradan $\dfrac{r}{f}=\dfrac{q}{e}=\dfrac{p}{d}$ olur ki bu durum, x ile y lineer bağımsız olduğundan imkansızdır. Sonuç olarak $\{c_n\}$ bir Cauchy dizisidir.

Benzer yaklaşım ve işlemlerle $\{a_n\}$ ve $\{b_n\}$ de birer Cauchy dizileridir.

Reel sayıların tamlığından dolayı $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$ ve $\lim\limits_{n\to\infty}c_n=c$ olacak biçimde *a*, *b* ve *c* reel sayıları vardır.

$x=ai+bj+ck$ alalım. $x_n\to x$ olsun. $w=si+tj+uk$ $\mathbb{R}^3$ ’ün bir elemanı olsun.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left|\left(x_n-x\right)\times w\right| &= \lim_{n\to\infty}\left|\det\begin{pmatrix} i & j & k \\ a_n-a & b_n-b & c_n-c \\ s & t & u\end{pmatrix}\right| \\
&= \lim_{n\to\infty}\Big[\left[u\left(b_n-b\right)-t\left(c_n-c\right)\right]^2+\left[s\left(c_n-c\right)-u\left(a_n-a\right)\right]^2 \\
&\quad +\left[t\left(a_n-a\right)-s\left(b_n-b\right)\right]^2\Big]^{1/2}=0
\end{aligned}$$

olur. Çünkü $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$ ve $\lim\limits_{n\to\infty}c_n=c$ dir. Böylece $\left(\mathbb{R}^3,\|\cdot,\cdot\|\right)$ bir 2-Banach uzayıdır.

Örnek 3.2.3: Rasyonel sayılar üzerinde, tüm katsayıları rasyonel olan, üç boyutlu Öklid vektör uzayı Q^3 olsun. Q^3 'de $\|\cdot,\cdot\|$ 'u Örnek 3.2.1 'deki gibi tanımlansın. $x_n = \sum_{k=0}^{n} 10^{\frac{-k(k+1)}{2}} i$ alınsın. $\|x_n - x_m, i\| = 0$ dır. Gerçekten $n > m$ için,

$$\begin{aligned} x_n - x_m &= \sum_{k=0}^{n} 10^{\frac{-k(k+1)}{2}} i - \sum_{k=0}^{m} 10^{\frac{-k(k+1)}{2}} i \\ &= \sum_{k=m+1}^{n} 10^{\frac{-k(k+1)}{2}} i \end{aligned}$$

o halde,

$$|x_n - x_m| = \sum_{k=m+1}^{n} 10^{\frac{-k(k+1)}{2}}$$

olur.Böylece,

$$\|x_n - x_m, i\| = \left| \det \begin{pmatrix} i & j & k \\ \sum_{k=m+1}^{n} 10^{\frac{-k(k+1)}{2}} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right| = 0.$$

Bu yüzden $\lim_{n,m\to\infty} \|x_n - x_m, i\| = 0$ dır.

$$\begin{aligned} \|x_n - x_m, j\| &= \left| \det \begin{pmatrix} i & j & k \\ \sum_{k=m+1}^{n} 10^{\frac{-k(k+1)}{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \right| \\ &= \left| \left(\sum_{k=m+1}^{n} 10^{\frac{-k(k+1)}{2}} \right) . k \right| = |x_n - x_m| |k| = |x_n - x_m| \end{aligned}$$

o halde,

$$\begin{aligned} \lim_{n,m\to\infty} \|x_n - x_m, j\| = \lim_{n,m\to\infty} |x_n - x_m| &= \lim_{n,m\to\infty} \left| \sum_{k=m+1}^{n} 10^{\frac{-k(k+1)}{2}} \right| \\ &= \lim_{n,m\to\infty} \left| 10^{\frac{-(m+1)(m+2)}{2}} + \mathbf{K} + 10^{\frac{-n(n+1)}{2}} \right| = 0 \end{aligned}$$

olur. Böylece $\lim\limits_{n,m\to\infty}\|x_n - x_m, j\| = 0$ elde edilmiş oldu. i ve j Q^3 'de lineer bağımsız olduğundan $\{x_n\}$ Q^3 'de bir Cauchy dizisi olur. Varsayılsın ki $x_n \to x$ olacak biçimde bir $x = ai + bj + ck \in Q^3$ olsun. Böylece $\lim\limits_{n,m\to\infty}\|x_n - x, j\| = 0$ olur, çünkü

$$\lim_{n\to\infty}\|x_n - x, j\| = \lim_{n\to\infty}\left|\det\begin{pmatrix} i & j & k \\ \sum\limits_{k=0}^{n} 10^{\frac{-k(k+1)}{2}} - a & -b & -c \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right|$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\left(\sum_{k=0}^{n} 10^{\frac{-k(k+1)}{2}} - a\right)^2 + c^2\right)^{\frac{1}{2}} = 0$$

dır. Burada açıkça $c = 0$ olmalıdır. Böylece $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n} 10^{\frac{-k(k+1)}{2}} = a$ olur. Buradan,

$$\sum_{k=0}^{n} 10^{\frac{-k(k+1)}{2}} = 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^3} + \mathbf{K} + \frac{1}{10^{\frac{n(n+1)}{2}}}$$

yazıldığında açıkça görülür ki $\left\{\sum\limits_{k=0}^{n} 10^{-k(k+1)}\right\}$ dizisi reel sayılarda bir irrasyonel sayıya yakınsar. Bu durumda a bir irrasyonel sayı olmalıdır. Q^3 rasyonel sayılar üzerinde tanımlandığından bu durum imkansızdır. Böylece Q^3 bir 2-Banach uzayı değildir.

Gähler (1964) göstermiştir ki, B, bazı $\{e_1, e_2\}$ olan bir 2-normlu vektör uzayı ise $a, b \in B$ için $a = a_1 e_1 + a_2 e_2$ ve $b = b_1 e_1 + b_2 e_2$ iken 2-normun,

$$\|a, b\| = |a_1 b_2 - a_2 b_1| . \|e_1, e_2\| \qquad (*)$$

biçiminde tanımlanır.

Teorem 3.2.2: Üzerinde tanımlandığı cisim tam olan 2 boyutlu her 2-normlu vektör uzayı bir 2-Banach uzayıdır.

İspat: B, bazı $\{e_1, e_2\}$ olan bir 2-normlu vektör uzayı olsun. $\{x_n\}$ B 'de bir Cauchy dizisi olsun. Böylece B 'de $\lim\limits_{m,n\to\infty}\|x_n - x_m, a\| = 0$ ve $\lim\limits_{m,n\to\infty}\|x_n - x_m, b\| = 0$

olacak biçimde lineer bağımsız a ve b vektörleri vardır. $x_n = x_{n1}e_1 + x_{n2}e_2$, $a = a_1e_1 + a_2e_2$ ve $b = b_1e_1 + b_2e_2$ olsun. Böylece (*) ’dan,

$$\begin{aligned}\|x_n - x_m, a\| &= \|(x_{n1} - x_{m1})e_1 + (x_{n2} - x_{m2})e_2, a_1e_1 + a_2e_2\| \\ &= |a_2(x_{n1} - x_{m1}) - a_1(x_{n2} - x_{m2})| . \|e_1, e_2\|\end{aligned}$$

olur. Benzer olarak yine (*) ’dan,

$$\|x_n - x_m, b\| = |b_2(x_{n1} - x_{m1}) - b_1(x_{n2} - x_{m2})| . \|e_1, e_2\|$$

yazılır. Bu ifadelerde e_1 ile e_2 lineer bağımsız olduklarından $\|e_1, e_2\| \neq 0$ dır. Böylece,

$$\lim_{m,n\to\infty} |a_2(x_{n1} - x_{m1}) - a_1(x_{n2} - x_{m2})| = 0$$

ve

$$\lim_{m,n\to\infty} |b_2(x_{n1} - x_{m1}) - b_1(x_{n2} - x_{m2})| = 0$$

elde edilir. Burada,

$$\lim_{m,n\to\infty} [a_2(x_{n1} - x_{m1}) - a_1(x_{n2} - x_{m2})] = 0$$

ve

$$\lim_{m,n\to\infty} [b_2(x_{n1} - x_{m1}) - b_1(x_{n2} - x_{m2})] = 0$$

olur. Birinci eşitlik b_2 ile çarpılırsa,

$$\lim_{m,n\to\infty} [a_2b_2(x_{n1} - x_{m1}) - a_1b_2(x_{n2} - x_{m2})] = 0$$

ve ikinci eşitlik de $-a_2$ ile çarpılırsa,

$$\lim_{m,n\to\infty} [-a_2b_2(x_{n1} - x_{m1}) + a_2b_1(x_{n2} - x_{m2})] = 0$$

elde edilir. Bu iki eşitlik taraf tafra toplandığında,

$$\lim_{m,n\to\infty} (a_2b_1 - a_1b_2)(x_{n2} - x_{m2}) = 0$$

olur. Burada $a_2b_1 - a_1b_2 = 0$ olması halinde $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2}$ olacaktır ki bu durum a ile b 'nin lineer bağımsız olmasından dolayı imkansızdır. Bu durumda $\lim\limits_{m,n\to\infty} \left| x_{n2} - x_{m2} \right| = 0$ olacaktır ve bundan dolayı $\{x_{n2}\}$ bir reel Cauchy dizisidir. Ayrıca,

$$\lim_{m,n\to\infty} \left[a_2 \left(x_{n1} - x_{m1} \right) - a_1 \left(x_{n2} - x_{m2} \right) \right] = 0$$

ve

$$\lim_{m,n\to\infty} \left[b_2 \left(x_{n1} - x_{m1} \right) - b_1 \left(x_{n2} - x_{m2} \right) \right] = 0$$

eşitliklerinde, birinci eşitlik b_1 ile çarpılırsa,

$$\lim_{m,n\to\infty} \left[a_2b_1 \left(x_{n1} - x_{m1} \right) - a_1b_1 \left(x_{n2} - x_{m2} \right) \right] = 0$$

ve ikinci eşitlik de $-a_1$ ile çarpılırsa,

$$\lim_{m,n\to\infty} \left[-a_1b_2 \left(x_{n1} - x_{m1} \right) + a_1b_1 \left(x_{n2} - x_{m2} \right) \right] = 0$$

elde edilir. Bu iki eşitlik taraf tafra toplandığında,

$$\lim_{m,n\to\infty} \left(a_2b_1 - a_1b_2 \right) \left(x_{n1} - x_{m1} \right) = 0$$

olur. Burada $a_2b_1 - a_1b_2 \neq 0$ olduğundan $\lim\limits_{m,n\to\infty} \left| x_{n1} - x_{m1} \right| = 0$ olacaktır ve bundan dolayı $\{x_{n1}\}$ de bir reel Cauchy dizisidir.

$\{x_{n1}\}$ ve $\{x_{n2}\}$ reel Cauchy dizileri olduklarından $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n1} = y_1$ ve $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n2} = y_2$ olacak biçimde y_1 ve y_2 reel sayıları vardır. $x = y_1e_1 + y_2e_2$ olsun. $x_n \to x$ olduğunu varsayalım. $c = c_1e_1 + c_2e_2$ B 'nin bir elemanı olsun. Böylece (*) kullanılırsa,

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \left\| x_n - x, c \right\| &= \lim_{n\to\infty} \left\| \left(x_{n1} - y_1 \right) e_1 + \left(x_{n2} - y_2 \right) e_2, c_1e_1 + c_2e_2 \right\| \\ &= \lim_{n\to\infty} \left| c_2 \left(x_{n1} - y_1 \right) - c_1 \left(x_{n2} - y_2 \right) \right| . \left\| e_1, e_2 \right\| \end{aligned}$$

olur. Burada $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n1} = y_1$ ve $\lim\limits_{n\to\infty} x_{n2} = y_2$ olduğundan dolayı $\lim\limits_{n\to\infty} \left\| x_n - x, c \right\| = 0$ olur. Böylece $x_n \to x$ olur. Bu durumda B bir 2-Banach uzayıdır.

Teorem 3.2.3: *B*, bir 2-normlu vektör uzayı olsun. Eğer $\lim_{m,n\to\infty}\|x_n - x_m, d\| = 0$ ise, o zaman $\{\|x_n - x, d\|\}$ dizisi her $x \in B$ için yakınsak bir dizidir.

İspat:

$$\begin{aligned}\|x_n - x, d\| &= \|x_n - x_m + x_m - x, d\| \\ &\leq \|x_n - x_m, d\| + \|x_m - x, d\|\end{aligned}$$

olur ve buradan,

$$\|x_n - x, d\| - \|x_m - x, d\| \leq \|x_n - x_m, d\| \qquad (*_1)$$

elde edilir. Benzer olarak,

$$\|x_m - x, d\| - \|x_n - x, d\| \leq \|x_n - x_m, d\|$$

veya

$$-\|x_n - x_m, d\| \leq \|x_n - x, d\| - \|x_m - x, d\| \qquad (*_2)$$

olur ve böylece $(*_1)$ ve $(*_2)$ 'den,

$$\left|\ \|x_n - x, d\| - \|x_m - x, d\|\ \right| \leq \|x_n - x_m, d\|$$

bulunur. Burada $\lim_{m,n\to\infty}\|x_n - x_m, d\| = 0$ olduğundan,

$$\lim_{m,n\to\infty}\big|\|x_n - x, d\| - \|x_m - x, d\|\big| = 0$$

olur. Bunun sonucu olarak $\{\|x_n - x, d\|\}$ dizisi bir gerçel Cauchy dizisi olur ve bu yüzden $\{\|x_n - x, d\|\}$ dizisi yakınsak bir dizidir. Bu yakınsaklık x 'den bağımsızdır.

Teorem 3.2.4: Eğer $\lim_{n\to\infty}\|x_n - x, d\| = 0$ ise $\lim_{n\to\infty}\|x_n, d\| = \|x, d\|$ dir.

İspat:

$$\begin{aligned}\|x_n, d\| &= \|x_n - x + x, d\| \\ &\leq \|x_n - x, d\| + \|x, d\|\end{aligned}$$

olur ve buradan,

$$\|x_n, d\| - \|x, d\| \leq \|x_n - x, d\| \qquad (*)$$

elde edilir. Benzer olarak,

$$\|x,d\|-\|x_n,d\|\leq\|x_n-x,d\|$$

veya

$$-\|x_n-x,d\|\leq\|x_n,d\|-\|x,d\| \qquad (**)$$

bulunur. Böylece $(*)$ ve $(**)$ ’dan,

$$\left|\ \|x_n,d\|-\|x,d\|\ \right|\leq\|x_n-x,d\|$$

elde edilir. Eşitsizliğin her iki tarafının limiti alındığında, $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n-x,d\|=0$ olduğundan,

$$\lim_{n\to\infty}\left|\ \|x_n,d\|-\|x,d\|\ \right|=0$$

olur. Böylece $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n,d\|=\|x,d\|$ bulunur. Ek olarak eğer hipotezde $d=x$ alınırsa $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n,x\|=\|x,x\|=0$ olduğu görülür.

4. SINIRLI LİNEER 2-FONKSİYONELLER

4.1 Sınırlı Lineer 2-Fonksiyonel

Tanım 4.1.1: *A* ve *C*, 2-normlu bir vektör uzayının lineer manifoldları olsun Tanım kümesi $A \times C$ olan reel değerli bir fonksiyona bir ***2-fonksiyonel*** denir.

Tanım 4.1.2: *F*, tanım kümesi $A \times C$ olan bir 2-fonksiyonel olsun. Eğer *F*,

i) $F(a+c, b+d) = F(a,b) + F(a,d) + F(c,b) + F(c,d)$,

ii) a, b cismin elemanları olmak üzere $F(a\,a, b\,b) = a\,b\,F(a,b)$,

koşullarını sağlıyorsa *F* 'ye bir ***lineer 2-fonksiyonel*** denir.

Tanım 4.1.3: *F*, tanım kümesi $D(F)$ olan bir lineer 2-fonksiyonel olsun. Her $(a,b) \in D(F)$ için $|F(a,b)| \leq K\|a,b\|$ olacak biçimde bir *K* reel sayısı var ise *F* 'ye ***sınırlıdır*** denir. Eğer *F* sınırlı ise *F* 'nin normu,

$$\|F\| = \inf\left\{K : |F(a,b)| \leq K\|a,b\|, \forall (a,b) \in D(F)\right\}$$

biçiminde tanımlanır. Eğer *F* sınırlı değil ise $\|F\| = +\infty$ biçiminde tanımlanır.

Örnek 4.1.1: *B*, bazı $\{e_1, e_2\}$ olan bir 2-normlu vektör uzayı olsun. $a = a_1e_1 + a_2e_2$ ve $b = b_1e_1 + b_2e_2$ iken $F(a,b) = a_1b_2 - a_2b_1$ biçiminde tanımlansın. Ayrıca $c = v_1e_1 + v_2e_2$ ve $d = d_1e_1 + d_2e_2$ olsun.

$$\begin{aligned} F(a+c, b+d) &= (a_1+v_1)(b_2+d_2) - (a_2+v_2)(b_1+d_1) \\ &= a_1b_2 + a_1d_2 + v_1b_2 + v_1d_2 - a_2b_1 - a_2d_1 - v_2b_1 - v_2d_1 \\ &= (a_1b_2 - a_2b_1) + (a_1d_2 - a_2d_1) + (v_1b_2 - v_2b_1) + (v_1d_2 - v_2d_1) \\ &= F(a,b) + F(a,d) + F(c,b) + F(c,d) \end{aligned}$$

dir.

$$\begin{aligned} F(a\,a, b\,b) &= a\,a_1 b b_2 - a\,a_2 b b_1 \\ &= a\,b\,(a_1b_2 - a_2b_1) \\ &= a\,b\,F(a,b) \end{aligned}$$

dir. Böylece *F*, bir lineer 2-fonksiyoneldir.

Bazı $\{e_1, e_2\}$ olan bir 2-normlu vektör uzayında 2-norm,

$$\|a,b\| = |a_1 b_2 - a_2 b_1| . \|e_1, e_2\|$$

biçiminde olduğu bilinmektedir. Buradan,

$$|a_1 b_2 - a_2 b_1| = \frac{1}{\|e_1, e_2\|} \|a,b\|$$

olur ve

$$|F(a,b)| = |a_1 b_2 - a_2 b_1|$$

eşitliğinde yerine yazılırsa

$$|F(a,b)| = \frac{1}{\|e_1, e_2\|} \|a,b\|$$

elde edilir. $K \geq \frac{1}{\|e_1, e_2\|}$ olduğundan *F*, sınırlı bir lineer 2-fonksiyoneldir.

Örnek 4.1.2: $(E_3, \|\cdot,\cdot\|)$ Örnek 3.2.1 'de tanımlanan 2-Banach uzayı olsun. $F(x,y) = x \cdot y$ biçimine tanımlansın. Burada $\cdot$, vektör analizindeki skaler çarpımı göstermektedir. *F* bir sınırsız lineer 2-fonksiyoneldir. Gerçekten:

$$\begin{aligned} F(a+c, b+d) &= (a+c) \cdot (b+d) \\ &= a \cdot b + a \cdot d + c \cdot b + c \cdot d \\ &= F(a,b) + F(a,d) + F(c,b) + F(c,d) \end{aligned}$$

dir.

$$\begin{aligned} F(\alpha a, \beta b) &= \alpha a \cdot \beta b \\ &= \alpha\beta\,(a \cdot b) \\ &= \alpha\beta\, F(a,b) \end{aligned}$$

dir. $x = ai + bj + ck$ ve $y = di + ej + fk$ için $x \cdot y = ad + be + cf$ dir. Buradan $|F(x,y)| = |ad + be + cf|$ dir. $\|x,y\| = |x \times y| = \left[(bf - ce)^2 + (cd - af)^2 + (ae - db)^2\right]^{\frac{1}{2}}$

olduğundan sınırlılık sağlanacak biçimde bir $K \geq 0$ sayısı bulunamaz. $|a|$, a 'nın uzunluğunu gösteriyor iken $G(x,y) = \left(|x|^2 |y|^2 - |x \cdot y|^2\right)^{\frac{1}{2}}$ biçiminde tanımlanan G ise

$$|a|^2 |b|^2 - |a \cdot b|^2 = |a \times b|^2$$

olduğundan dolayı bir sınırlı lineer 2-fonksiyoneldir. Gerçekten:

$$\begin{aligned}
|G(x,y)| &= \left| |x|^2 |y|^2 - |xy|^2 \right|^{\frac{1}{2}} \\
&= \left| \left(a^2+b^2+c^2\right)\left(d^2+e^2+f^2\right) - (ad+be+cf)^2 \right|^{\frac{1}{2}} \\
&= \left| a^2d^2 + a^2e^2 + a^2f^2 + b^2d^2 + b^2e^2 + b^2f^2 + c^2d^2 + c^2e^2 + c^2f^2 \right. \\
&\quad \left. - a^2d^2 - b^2e^2 - c^2f^2 - 2adbe - 2adcf - 2becf \right|^{\frac{1}{2}} \\
&= \left| a^2e^2 + a^2f^2 + b^2d^2 + b^2f^2 + c^2d^2 + c^2e^2 - 2adbe - 2adcf - 2becf \right|^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

dir.

$$\begin{aligned}
\|x,y\| = |x \times y| &= \left[(bf-ce)^2 + (cd-af)^2 + (ae-db)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \\
&= \left[b^2f^2 + c^2e^2 - 2bfce + c^2d^2 + a^2f^2 - 2cdaf + a^2e^2 + d^2b^2 - 2aedb \right]^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

dir. Böylece $|G(x,y)| = \|x,y\| = 1.\|x,y\|$ olup $K = 1$ dir.

Lemma 4.1.1: Eğer F, bir sınırlı lineer 2-fonksiyonel ve $(a,b) \in D(F)$ iken a ile b lineer bağımlı ise $F(a,b) = 0$ dır.

İspat: F sınırlı olduğundan her $(x,y) \in D(F)$ için $|F(x,y)| \leq \|F\| \|x,y\|$ dir. a ile b lineer bağımlı olduğundan $\|a,b\| = 0$ dir. Böylece

$$|F(a,b)| \leq \|F\|.0 = 0$$

olur. Böylece $F(a,b) = 0$ olarak bulunur.

Teorem 4.1.1: F, tanım kümesi $D(F)$ olan bir sınırlı lineer 2-fonksiyonel olsun.

$$\|F\| = \sup\left\{|F(x,y)| : \|x,y\| = 1, (x,y) \in D(F)\right\}$$
$$= \sup\left\{\frac{|F(x,y)|}{\|x,y\|} : \|x,y\| \neq 0, (x,y) \in D(F)\right\}$$

dir.

İspat: $A = \sup\left\{|F(x,y)| : \|x,y\| = 1, (x,y) \in D(F)\right\}$ olsun. Her $(x,y) \in D(F)$ için,

$$|F(x,y)| \leq \|F\| \|x,y\|$$

olduğundan

$$A \leq \|F\| \qquad (*)$$

olur. Varsayalım $\|x,y\| \neq 0$ olsun. Burada,

$$\left\|\frac{x}{\|x,y\|}, y\right\| = 1$$

olduğundan

$$\left|F\left(\frac{x}{\|x,y\|}, y\right)\right| \leq A$$

dir. Böylece her $(x,y) \in D(F)$ için $\|x,y\| \neq 0$ iken $|F(x,y)| \leq A\|x,y\|$ dir. Eğer $\|x,y\| = 0$ ise tanımdan dolayı x ile y lineer bağımlıdır ve Lemma 4.1.1 'den dolayı $F(x,y) = 0$ olur. Böylece her $(x,y) \in D(F)$ için $|F(x,y)| \leq A\|x,y\|$ dir ve buradan

$$\|F\| \leq A \qquad (**)$$

dır. O zaman $(*)$ ve $(**)$ 'dan $\|F\| = A$ bulunur.

$C = \sup\left\{\dfrac{|F(x,y)|}{\|x,y\|} : \|x,y\| \neq 0, (x,y) \in D(F)\right\}$ olsun. $\|F\|$ 'in tanımından, her $(x,y) \in D(F)$ için $\|x,y\| \neq 0$ iken

$$\frac{|F(x,y)|}{\|x,y\|} \le \|F\|$$

dir. Böylece her iki tarafın sup 'u alındığında

$$C \le \|F\| \qquad (*_1)$$

elde edilir. Lemma 4.1.1 ve C 'nin tanımından her $(x,y) \in D(F)$ için $|F(x,y)| \le C\|x,y\|$ olur. Böylece

$$\|F\| \le C \qquad (*_2)$$

dir. O halde $(*_1)$ ve $(*_2)$ 'den $\|F\| = C$ olur. Sonuç olarak $\|F\| = A = C$ bulunur.

Tanım 4.1.4: F, bir lineer 2-fonksiyonel ve $(a,b) \in D(F)$ olsun. Verilen bir $e > 0$ için $\|a-c,b\| < d$ ve $\|c,b-d\| < d$ veya $\|a-c,d\| < d$ ve $\|a,b-d\| < d$ iken $|F(a,b) - F(c,d)| < e$ olacak biçimde bir $d > 0$ var ise F, $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ ***'de süreklidir*** denir. Eğer F tanım kümesinin her bir noktasında sürekli ise F ***süreklidir*** denir.

Teorem 4.1.2: $\|\cdot,\cdot\|$ bir sürekli 2-fonksiyoneldir.

İspat:

$$\begin{aligned}
\|a,b\| &= \|(a-c)+c,b\| \\
&\le \|a-c,b\| + \|c,b\| \\
&= \|a-c,b\| + \|c,(b-d)+d\| \\
&\le \|a-c,b\| + \|c,b-d\| + \|c,d\|
\end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\|a,b\| - \|c,d\| \le \|a-c,b\| + \|c,b-d\| \qquad (*)$$

elde edilir. Ayrıca

$$\begin{aligned}
\|c,d\| &= \|c,(d-b)+b\| \\
&\le \|c,d-b\| + \|c,b\| \\
&= \|c,d-b\| + \|(c-a)+a,b\| \\
&\le \|c,d-b\| + \|c-a,b\| + \|a,b\|
\end{aligned}$$

olur. Buradan ise

$$\|c,d\| - \|a,b\| \leq \|a-c,b\| + \|c,b-d\|$$

elde edilir. Bu ifade düzenlenir ise

$$\|a,b\| - \|c,d\| \geq -\left[\|a-c,b\| + \|c,b-d\|\right] \qquad (**)$$

olur. Böylece $(*)$ ile $(**)$ ’dan ve mutlak değer tanımından

$$\left| \, \|a,b\| - \|c,d\| \, \right| \leq \|c,b-d\| + \|a-c,b\|$$

bulunur. Şimdi $e > 0$ verildiğinde $d = \frac{e}{2}$ seçilirse Tanım 4.1.4 ’e göre $\|c,b-d\| < d = \frac{e}{2}$ ve $\|a-c,b\| < d = \frac{e}{2}$ iken

$$\left| \|a,b\| - \|c,d\| \right| \leq \frac{e}{2} + \frac{e}{2} = e$$

bulunur. Böylece $\|\cdot,\cdot\|$ süreklidir.

Teorem 4.1.3: F, tanım kümesi $D(F)$ olan bir lineer 2-fonksiyonel olsun. Eğer F, $(0,0)$ ’da sürekli ise $D(F)$ ’in her noktasında süreklidir.

İspat: F lineer olduğundan $F(0,0) = 0$ dır. F, $(0,0)$ ’da sürekli olduğundan herhangi bir $(c,d) \in D(F)$ için verilen bir $e > 0$ sayısı için $\|c,d\| < d$ iken $|F(c,d)| < \frac{e}{2}$ olacak biçimde bir $d > 0$ vardır. $(a,b) \in D(F)$ olsun. Bu durumda $\|a-x,b\| < d$ ve $\|x,b-y\| < d$ iken

$$\begin{aligned}
|F(a,b) - F(x,y)| &= |F(a,b) - F(x,b) + F(x,b) - F(x,y)| \\
&\leq |F(a,b) - F(x,b)| + |F(x,b) - F(x,y)| \\
&= |F(a-x,b)| + |F(x,b-y)| \\
&\leq \frac{e}{2} + \frac{e}{2} = e
\end{aligned}$$

olur. Böylece F, (a,b) ’de süreklidir.

Teorem 4.1.4: *F* bir lineer 2-fonksiyonel olsun. *F* süreklidir ancak ve ancak *F* sınırlıdır.

İspat: F 'in sürekli olduğu kabul edilsin. Bu durumda $(a,b) \in D(F)$ için $\|a,b\| < d$ iken $|F(a,b)| < 1$ olacak biçimde bir $d > 0$ vardır. $(c,d) \in D(F)$ için *c* ve *d* lineer bağımsız iken $\left(\frac{c}{\|c,d\|}\frac{d}{2}, d\right)$ ele alınsın.

$$\left\|\frac{c}{\|c,d\|}\frac{d}{2}, d\right\| = \frac{1}{\|c,d\|}\frac{d}{2}\|c,d\| = \frac{d}{2}$$

olur. Böylece $F\left(\frac{c}{\|c,d\|}\frac{d}{2}, d\right) < 1$ dir. Buradan $|F(c,d)| < \frac{2}{d}\|c,d\|$ olur. Bu durumda $\|a,b\| < d_n$ iken $|F(a,b)| < \frac{1}{n}$ olacak biçimde bir d_n vardır. *c* ile *d* lineer bağımlı ise $\|c,d\| = 0 < d_n$ olur ve böylece $|F(c,d)| = 0$ dır. Böylece *F* sınırlıdır.

F 'in sınırlı olduğu kabul edilsin. Her $(x,y) \in D(F)$ için $|F(x,y)| < K\|x,y\|$ olacak biçimde bir $K \geq 0$ sayısı vardır. Verilen bir $e > 0$ için $d = \frac{e}{K+1}$ olsun. $\|x,y\| < d$ iken

$$|F(x,y)| \leq K\|x,y\| < K\frac{e}{K+1} < e$$

dir. Böylece *F*, $(0,0)$ 'da süreklidir ve Teorem 4.1.3 'den dolayı *F* süreklidir.

Tanım 4.1.5: *B*, bir 2-Banach uzayı ve B^*, tanım kümesi $B \times B$ olan tüm sınırlı lineer 2-fonksiyonellerin kümesi olsun. $F, G \in B^*$ için:

i) Her $(a,b) \in B \times B$ için $F(a,b) = G(a,b)$ ise $F = G$ dir,

ii) $(F+G)(a,b) = F(a,b) + G(a,b)$,

iii) $(aF)(a,b) = aF(a,b)$,

olarak tanımlanır.

Teorem 4.1.5: Tanım 4.1.3 ve Tanım 4.1.5 ’e göre $\left(B^{*},\| \, . \, \|\right)$ Banach uzayıdır.

İspat:

$$\begin{aligned}(F+G)(a+c,b+d) &= F(a+c,b+d)+G(a+c,b+d)\\ &= F(a,b)+F(a,d)+F(c,b)+F(c,d)\\ &\quad +G(a,b)+G(a,d)+G(c,b)+G(c,d)\\ &= \left(F(a,b)+G(a,b)\right)+\left(F(a,d)+G(a,d)\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(F+G)(a\,a,b\,b) &= F(a\,a,b\,b)+G(a\,a,b\,b)\\ &= a\,b\,F(a,b)+a\,b\,G(a,b)\\ &= a\,b\left(F(a,b)+G(a,b)\right)\\ &= a\,b\,(F+G)(a,b)\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\left|(F+G)(a,b)\right| &= \left|F(a,b)+G(a,b)\right|\\ &\le \left|F(a,b)\right|+\left|G(a,b)\right|\\ &\le \|F\|\|a,b\|+\|G\|\|a,b\|\\ &= \left(\|F\|+\|G\|\right)\|a,b\|.\end{aligned}$$

O halde $F+G\in B^{*}$ ve $\|F+G\|\le\|F\|+\|G\|$ dir. Benzer olarak $a\,F\in B^{*}$ dır. Böylece B^{*} bir vektör uzayıdır. $\| \, . \, \|$, B^{*} üzerinde bir norm tanımlar çünkü:

1) Eğer $\|F\|=0$ ise $F=0$, eğer $F=0$ ise $\|F\|=0$ dır.

2) $\|a\,F\|=|a|\,\|F\|$.

3) $\|F+G\|\le\|F\|+\|G\|$.

$\{F_n\}$, B^{*} ’da bir Cauchy dizisi olsun. Böylece

$$\lim_{m,n\to\infty}\|F_n-F_m\|=0$$

ve

$$\left|F_n(a,b)-F_m(a,b)\right|\le\|F_n-F_m\|\|a,b\|$$

dir. O zaman her $(a,b)\in B\times B$ için $\{F_n(a,b)\}$ bir reel Cauchy dizisidir.

$F(a,b)=\lim\limits_{n\to\infty}F_n(a,b)$ biçiminde tanımlansın.

$$\begin{aligned}
F(a+c,b+d) &= \lim_{n\to\infty}F_n(a+c,b+d)\\
&= \lim_{n\to\infty}F_n(a+c,b+d)\\
&= \lim_{n\to\infty}\left[F_n(a,b)+F_n(a,d)+F_n(c,b)+F_n(c,d)\right]\\
&= \lim_{n\to\infty}F_n(a,b)+\lim_{n\to\infty}F_n(a,d)+\lim_{n\to\infty}F_n(c,b)+\lim_{n\to\infty}F_n(c,d)\\
&= F(a,b)+F(a,d)+F(c,b)+F(c,d).
\end{aligned}$$

Ayrıca,

$$\begin{aligned}
F(a\,a,b\,b) &= \lim_{n\to\infty}F_n(a\,a,b\,b)\\
&= \lim_{n\to\infty}a\,b\,F_n(a,b)\\
&= a\,b\,\lim_{n\to\infty}F_n(a,b)\\
&= a\,b\,F(a,b).
\end{aligned}$$

Bu yüzden *F*, bir lineer 2-fonksiyoneldir.

$$\left|\|F_n\|-\|F_m\|\right|\le\|F_n-F_m\|$$

olduğundan $\{\|F_n\|\}$ bir reel Cauchy dizisidir. Bu durumda $\{\|F_n\|\}$ sınırlıdır. Böylece her *n* için $\|F_n\|\le K$ olacak biçimde bir *K* reel sayısı vardır.

$$\begin{aligned}
|F(a,b)| &= \left|\lim_{n\to\infty}F_n(a,b)\right|\\
&= \lim_{n\to\infty}|F_n(a,b)|\\
&\le \lim_{n\to\infty}\|F_n\|\|(a,b)\|\\
&\le K\|(a,b)\|
\end{aligned}$$

bulunur. O zaman $F\in B^*$ olur. Varsayalım $\|a,b\|\ne 0$ olsun. Verilen bir $e>0$ için $m,n>N$ iken $\|F_m-F_n\|<e$ olacak biçimde bir N sayısı vardır. Bu yüzden, her $m,n>N$ için

$$\begin{aligned} \left|F_m(a,b)-F_n(a,b)\right| &\le \left\|F_m-F_n\right\|\left\|a,b\right\| \\ &\le \left\|a,b\right\|e \end{aligned}$$

olur. $F(a,b)=\lim_{n\to\infty}F_n(a,b)$ olduğundan

$$\left|F_M(a,b)-F(a,b)\right|<e\left\|a,b\right\|$$

olacak biçimde bir $M=M(a,b)>N$ sayısı vardır. Bu yüzden her $n>N$ için

$$\begin{aligned} \left|F_n(a,b)-F(a,b)\right| &\le \left|F_n(a,b)-F_M(a,b)\right|+\left|F_M(a,b)-F(a,b)\right| \\ &\le e\left\|a,b\right\|+e\left\|a,b\right\| \\ &=2\left\|a,b\right\|e \end{aligned}$$

dur. Eğer $\left\|a,b\right\|=0$ ise a ile b lineer bağımlı olacağından Lemma 4.1.1 'den

$$F_n(a,b)=0=F(a,b)$$

olur ve böylece

$$\left|F_n(a,b)-F(a,b)\right|\le 2\left\|a,b\right\|e$$

olur. Sonuç olarak her $(a,b)\in D(F)$ ve her $n>N$ için

$$\left|F_n(a,b)-F(a,b)\right|\le 2\left\|a,b\right\|e$$

dir. Bu yüzden

$$\left|F_n(a,b)-F(a,b)\right|\le\left\|F_n-F\right\|\left\|a,b\right\|\le 2\left\|a,b\right\|e$$

bulunur. Buradan her $n>N$ için $\left\|F_n-F\right\|\le 2e$ dur. Böylece $\left(B^*,\left\|\,.\,\right\|\right)$ bir Banach uzayıdır.

Sıradaki teorem, “B^* lineer bağımlılığa göre bir 2-Banach uzayıdır” ifadesinin anlamını açıklayacaktır. Burada B^*, bir 2-Banach uzayı olmanın, F ve G lineer bağımlı iken $\left\|F,G\right\|=0$ koşulu hariç, tüm koşullarını sağlar. Başka deyişle F ve G lineer bağımlı olmasına rağmen $\left\|F,G\right\|\neq 0$ olabilir.

Teorem 4.1.6: $\left(B^{*},\|\cdot,\cdot\|\right)$, lineer bağımlılığa göre, $\|F,G\|=\|F\|\|G\|$ iken bir 2-Banach uzayıdır.

İspat: Teorem 4.1.5 'den B^{*} 'ın bir vektör uzayı olduğu biliniyor. $\|\cdot,\cdot\|$ fonksiyonu, B^{*} üzerinde lineer bağımlılığa göre bir 2-norm tanımlar çünkü:

1) Eğer $\|F,G\|=0$ ise $F=0$ veya $G=0$ dır; böylece F ve G lineer bağımlıdır. Fakat $F=0$ veya $a=0$ olmadıkça $\|F,a\,F\|$ sıfır olamaz.
2) $\|F,G\|=\|F\|\|G\|=\|G\|\|F\|=\|G,F\|$.
3) $\|F,a\,G\|=\|F\|\|a\,G\|=\|F\|\;|a|\;\|G\|=|a|\,\|F,G\|$.
4) Teorem 4.1.5 'den $\|G+H\|\le\|G\|+\|H\|$. Böylece,

$$\begin{aligned}\|F,G+H\|&=\|F\|\|G+H\|\\&\le\|F\|\left(\|G\|+\|H\|\right)\\&=\|F\|\|G\|+\|F\|\|H\|\\&=\|F,G\|+\|F,H\|.\end{aligned}$$

$\{F_n\}$, $\left(B^{*},\|\cdot,\cdot\|\right)$ 'da bir Cauchy dizisi olsun. Böylece B^{*} 'da $\lim\limits_{m,n\to\infty}\|F_n-F_m,G\|=0$ ve $\lim\limits_{m,n\to\infty}\|F_n-F_m,H\|=0$ olacak biçimde lineer bağımsız G ve H elemanları vardır. Teorem 4.1.5 'deki aynı yaklaşımlarla, $\{F_n\}$, $\left(B^{*},\|\ .\ \|\right)$ 'de bir yakınsak dizidir ve bundan dolayı $\left(B^{*},\|\cdot,\cdot\|\right)$ uzayında da yakınsaktır. Böylece $\left(B^{*},\|\cdot,\cdot\|\right)$, lineer bağımlılığa göre bir 2-Banach uzayıdır.

Eğer $\left(B^{*},\|\cdot,\cdot\|\right)$, F ile G lineer bağımlı iken $\|F,G\|=0$ ve F ile G lineer bağımsız iken $\|F,G\|=\|F\|\|G\|$ olacak biçimde yeniden tanımlanacak olursa, o zaman $\left(B^{*},\|\cdot,\cdot\|\right)$ uzayı,

$$\|F,G+H\|\le\|F,G\|+\|F,H\|$$

özelliği, F ile G lineer bağımlı ve F ile H lineer bağımsız olması koşullarının göz önüne alınması halinde daima doğru olmaması dışında 2-Banach uzayının özelliklerini sağlar.

Ayrıca belirtilmeli ki Gähler (1964), eğer $(L,\|\,.\,\|)$ uzayı bir lineer normlu uzay ise o zaman L üzerinde bir 2-norm tanımlanabileceğini ispatlamıştır. Bununla beraber L bir Banach uzayı olmadığı zaman L 'nin bir 2-Banach uzayı olup olmadığı ispat gerektirir.

Notasyon: B bir 2-normlu vektör uzay ve $b \in B$ olsun. $[b]$ sembolü, b tarafından doğrulmuş lineer manifoldu gösterir.

Sıradaki teorem fonksiyonel analizdeki Hahn-Banach teoreminin benzeridir.

Teorem 4.1.7: B bir 2-Banach uzayı ve M ile $[b]$, B 'de lineer manifoldlar olsunlar. F, tanım kümesi $M \times [b]$ olan bir sınırlı lineer 2-fonksiyonel olsun. Bu durumda aşağıdaki koşulları sağlayacak şekilde, tanım kümesi $B \times [b]$ olan H gibi bir lineer 2-fonksiyonel vardır:

i) Her $(a, a\,b) \in M \times [b]$ için $H(a, a\,b) = F(a, a\,b)$.

ii) $\|H\| = \|F\|$.

İspat: $g \in B - M$ olsun. $N = \{a + b\,g : a \in M, b \text{ keyfi}\}$ olsun. a' ve a'' M 'nin elemanları olsunlar.

$$\begin{aligned} F(a',b) - F(a'',b) &= F(a' - a'', b) \\ &\le \|F\|\|a' - a'', b\| \\ &= \|F\|\|(a'+g) - (a''+g), b\| \\ &\le \|F\|\|(a'+g), b\| + \|F\|\|a''+g, b\| \end{aligned}$$

dır. Bu yüzden

(1) $$-\|F\|\|a''+g, b\| - F(a'', b) \le \|F\|\|a'+g, b\| - F(a', b)$$

dir. a' ve a'', M 'de değişkenler olsunlar. Böylece

$$
\begin{aligned}
S &= \sup_{a''\in M}\left\{-\|F\|\|a''+g,b\|-F(a'',b)\right\}\\
&\le \inf_{a'\in M}\left\{\|F\|\|a'+g,b\|-F(a',b)\right\}=I
\end{aligned}
$$

dir. r sayısı $S\le r\le I$ koşulunu sağlayan herhangi bir sayı olsun. $a'=a''=a$ alınsın. Bu durumda (1) eşitsizliği,

$$-\|F\|\|a+g,b\|-F(a,b)\le r\le \|F\|\|a+g,b\|-F(a,b)$$

olur. Burada her terime $F(a,b)$ eklenirse

$$-\|F\|\|a+g,b\|\le r+F(a,b)\le \|F\|\|a+g,b\|$$

elde edilir. Böylece

(2) $$\left|F(a,b)+r\right|\le \|F\|\|a+g,b\|$$

bulunur.

G fonksiyonu, $N\times[b]$ üzerinde,

$$G(a+b\,g,a\,b)=a\,F(a,b)+a\,b\,r$$

biçiminde tanımlansın.

$$
\begin{aligned}
G(a_1+b_1g+a_2+b_2g,a_1b+a_2b) &= G\big((a_1+a_2)+(b_1+b_2)g,(a_1+a_2)b\big)\\
&=(a_1+a_2)F(a_1+a_2,b)+(a_1+a_2)(b_1+b_2)r\\
&=a_1F(a_1,b)+a_1F(a_2,b)\\
&\quad+a_2F(a_1,b)+a_2F(a_2,b)\\
&\quad+a_1b_1r+a_1b_2r+a_2b_1r+a_2b_2r\\
&=\big(a_1F(a_1,b)+a_1b_1r\big)+\big(a_1F(a_2,b)+a_1b_2r\big)\\
&\quad+\big(a_2F(a_1,b)+a_2b_1r\big)+\big(a_2F(a_2,b)+a_2b_2r\big)\\
&=G(a_1+b_1g,a_1b)+G(a_2+b_2g,a_1b)\\
&\quad+G(a_1+b_1g,a_2b)+G(a_2+b_2g,a_2b).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
G\big(d\,(a+b\,g),ea\,b\big) &= G(d\,a+db\,g,ea\,b)\\
&=a\,e\,F(d\,a,b)+a\,edb\,r\\
&=ed\,\big(a\,F(a,b)+a\,b\,r\big)\\
&=ed\,G(a+b\,g,a\,r).
\end{aligned}
$$

Böylece *G*, *F* ’nin genişletilmişi olan, bir lineer 2-fonksiyoneldir. Gerçekten, $b \neq 0$ iken (2) ’de *a* yerine $\frac{a}{b}$ yazılırsa,

$$\left| F\left(\frac{a}{b}, b\right) + r \right| \leq \|F\| \left\| \frac{a}{b} + g, b \right\|$$

elde edilir. Burada eşitsizliğin her iki tarafı $|b|$ ile çarpılırsa, tüm b ’lar için

$$\left| F(a,b) + b\,r \right| \leq \|F\| \|a + b\,g, b\| \qquad (*_1)$$

bulunur.

$$\begin{aligned} \left| G(a + b\,g, a\,b) \right| &= \left| a\,F(a,b) + a\,b\,r \right| \\ &= |a| \left| F(a,b) + b\,r \right| \end{aligned}$$

olur ve burada $(*_1)$ ’den dolayı

$$\begin{aligned} \left| G(a + b\,g, a\,b) \right| &\leq |a| \|F\| \|a + b\,g, b\| \\ &= \|F\| \|a + b\,g, a\,b\| \qquad (*_2) \end{aligned}$$

bulunur. Böylece *G* sınırlıdır ve $\|G\| \leq \|F\|$ dir. Çünkü:

$$\|G\| = \inf \left\{ K : \left| G(a + b\,g, a\,b) \right| \leq K \|a + b\,g, a\,b\| \right\}$$

dir. $(*_2)$ eşitsizliğinden $K = \|F\|$ olur. Böylece inf ’den dolayı $\|G\| \leq \|F\|$ olur. Bununla beraber G ’nin $N \times [b]$ üzerindeki tanımında $b = 0$ alınırsa, o zaman $M \times [b]$ üzerinde,

$$\begin{aligned} G(a + 0g, a\,b) &= a\,F(a,b) + a\,0r \\ G(a, a\,b) &= F(a, a\,b) \end{aligned}$$

olduğundan dolayı $G = F$ ve dolayısıyla $\|G\| = \|F\|$ olur.

Şimdi ise *N*, bir lineer manifold ve *G*, tanım kümesi $N \times [b]$ olan sınırlı bir lineer 2-fonksiyonel iken $\{N, G\}$ ikilisi göz önüne alınsın. $\{N, G\} < \{N', G'\}$ dir ancak ve ancak $N \subset N'$ ve $\|G\| = \|G'\|$ olacak biçimde G', G ’nin bir genişletilmişidir. T, $\{M,F\}<\{N,G\}$ olacak biçimde $\{N,G\}$ 'nin bir sınıfı olsun. Burada T, "<" bağıntısı ile kısmi olarak sıralıdır. L, T 'nin bir sıralı alt kümesi olsun. $K=\bigcup_{N\in L} N$ için L, T 'de bir maksimal elemana sahiptir ve $I(a,ab)$ fonksiyoneli, G, a 'yı kapsayan bir $N\in L$ üzerinde tanımlı iken, $G(a,ab)$ 'ye eşittir. Böylece Zorn Lemmasına göre T, $\{A,H\}$ biçiminde bir maksimal eleman içerir. $A=B$ değil ise, H yukarıdaki savlarla B 'de tanımlı olacak biçimde genişletilebilir.

Sonuç 4.1.1: B, bir 2-Banach uzayı ve M ve $[b]$ ise B 'de birer lineer manifold olsunlar. F, tanım kümesi $[b]\times M$ olan bir sınırlı lineer 2-fonksiyonel olsun. Bu durumda

1) Her $(bb,a)\in[b]\times M$ için $H(bb,a)=F(bb,a)$
2) $\|H\|=\|F\|$

koşullarını sağlayan ve tanım kümesi $[b]\times B$ olan bir sınırlı lineer 2-fonksiyonel H vardır.

Teorem 4.1.8: B, bir 2-Banach uzayı ve a ile b B 'nin lineer bağımsız elemanları olsunlar. Bu durumda tanım kümesi $[b]\times B$ olan bir sınırlı lineer 2-fonksiyonel F ve tanım kümesi $[a]\times B$ olan bir sınırlı lineer 2-fonksiyonel G vardır öyle ki $\|F\|=\|G\|=1$ ve $F(a,b)=\|F\|\|a,b\|=G(a,b)$ dir.

İspat: F, $[a]\times[b]$ üzerinde

$$F(aa,bb)=ab\,\|a,b\|$$

olarak tanımlansın.

$$\begin{aligned}F(aa+va,bb+db)&=F((a+v)a,(b+d)b)\\&=(a+v)(b+d)\|a,b\|\\&=(ab+ad+vb+vd)\|a,b\|\\&=ab\,\|a,b\|+ad\,\|a,b\|\\&\quad+vb\,\|a,b\|+vd\,\|a,b\|\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= F(aa, bb) + F(aa, db) \\ &\quad + F(va, bb) + F(va, db) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} F(daa, ebb) &= (de)(ab)\|a,b\| \\ &= de F(aa, bb) \end{aligned}$$

dir.

$$|F(aa, bb)| = |ab|\|a,b\| = 1.\|aa, bb\|$$

dir. Böylece *F* bir sınırlı lineer 2-fonksiyoneldir ve $\|F\| = 1$ dir. Teorem 4.1.7 ile *F*, $[b]\times B$ 'ye genişletilebilir. Benzer yaklaşımlar *G* içinde doğrudur.

Teorem 4.1.9: $(B,\|\cdot,\cdot\|)$, $\{e_i\}_{i=1}^n$ bazı ile n-boyutlu bir 2-normlu vektör uzayı olsun. $F \in B^*$ olsun. Bu durumda,

$$F\left(\sum_{i=1}^n a_i e_i, \sum_{j=1}^n b_j e_j\right) = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^n (a_i b_j - a_j b_i) F(e_i, e_j)$$

dir.

İspat: B^*, tanım kümesi $B\times B$ olan sınırlı lineer 2-fonksiyoneller uzayı olduğundan *F*, bir sınırlı lineer 2-fonksiyoneldir. Bu durumda

$$0 = F(e_i + e_j, e_i + e_j) = F(e_j + e_i) + F(e_i + e_j)$$

olduğundan buradan

$$F(e_i, e_j) = -F(e_j, e_i)$$

dir.

$$\begin{aligned} F\left(\sum_{i=1}^n a_i e_i, \sum_{j=1}^n b_j e_j\right) &= F(a_1 e_1 + \dots + a_n e_n, e_1 b_1 + \dots + e_n b_n) \\ &= a_1 b_1 F(e_1, e_1) + \dots + a_1 b_n F(e_1, e_n) \\ &\quad + a_2 b_1 F(e_2, e_1) + \dots + a_2 b_n F(e_2, e_n) \\ &\quad + \dots + a_n b_1 F(e_n, e_1) + \dots + a_n b_n F(e_n, e_n) \end{aligned}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_i b_j F(e_i, e_j)$$
$$= \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{n} (a_i b_j - a_j b_i) F(e_i, e_j)$$

olur. Bu durum

$$F(a,b) = -F(b,a)$$

olmasını gerektirir.

B_2, bazı $\{e_1, e_2\}$ olan bir 2-Banach uzayını, B_2^* ise tanım kümesi $B_2 \times B_2$ olan sınırlı lineer 2-fonksiyonellerin kümesini göstersin.

Sonuç 4.1.2: Eğer $F \in B_2^*$ ise o zaman

$$\|F\| = \frac{|F(e_1, e_2)|}{\|e_1, e_2\|}$$

dir.

İspat:

$$F(a_1e_1 + a_2e_2, b_1e_1 + b_2e_2) = |a_1b_2 - a_2b_1| |F(e_1, e_2)|$$
$$= \frac{|F(e_1, e_2)|}{\|e_1, e_2\|} |a_1b_2 - a_2b_1| \|e_1, e_2\|$$
$$= \frac{|F(e_1, e_2)|}{\|e_1, e_2\|} \|a_1e_1 + a_2e_2, b_1e_1 + b_2e_2\|$$

dir. Bu yüzden

$$\|F\| = \frac{|F(e_1, e_2)|}{\|e_1, e_2\|}$$

olur.

Sonuç 4.1.3: Eğer $F \in B_2^* - \{0\}$ ise o zaman $|F(a,b)|$, B_2 üzerinde bir 2-norm tanımlar.

İspat:

(2N1):

$$F\left(a_1e_1+a_2e_2,b_1e_1+b_2e_2\right)=\left|a_1b_2-a_2b_1\right|\left|F\left(e_1,e_2\right)\right|$$

ifadesinin sıfıra eşit olabilmesi için gerek ve yeter koşul $a_1e_1+a_2e_2$ ve $b_1e_1+b_2e_2$ ifadelerinin lineer bağımlı olmasıdır. Bu durumda $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}$ olur ve böylece $a_1b_2-a_2b_1=0$ dır.

(2N2): Teorem 4.1.9 'un sonucundan $F\left(a,b\right)=-F\left(b,a\right)$ olduğu biliniyor. Bu durumda

$$\begin{aligned}\left|F\left(a,b\right)\right|&=\left|-F\left(b,a\right)\right|\\&=\left|-1\right|\left|F\left(b,a\right)\right|\\&=\left|F\left(b,a\right)\right|\end{aligned}$$

elde edilir.

(2N3):

$$\begin{aligned}\left|F\left(a,bb\right)\right|&=\left|b\,F\left(a,b\right)\right|\\&=\left|b\right|\left|F\left(a,b\right)\right|\end{aligned}$$

(2N4):

$$\begin{aligned}\left|F\left(a,b+c\right)\right|&=\left|F\left(a,b\right)+F\left(a,c\right)\right|\\&\leq\left|F\left(a,b\right)\right|+\left|F\left(a,c\right)\right|\end{aligned}$$

Sonuç olarak, (2N1)-(2N4) koşulları sağlandığından, $\left|F\left(a,b\right)\right|$, B_2 üzerinde bir 2-norm tanımlar.

Sonuç 4.1.4: $F\in B_2^{*}-\{0\}$ olsun.

$$\left(a|b\right)=F\left(e_1,a\right)F\left(e_1,b\right)+F\left(a,e_2\right)+F\left(b,e_2\right)$$

bağıntısı B_2 üzerinde bir iç çarpım tanımlar.

İspat: $a=a_1e_1+a_2e_2$ ve $b=b_1e_1+b_2e_2$ olsun. Teorem 4.1.9 'dan

$$\left(a|b\right)=F\left(e_1,a\right)F\left(e_1,b\right)+F\left(a,e_2\right)+F\left(b,e_2\right)=\left(a_1b_1+a_2b_2\right) \qquad (*)$$

olduğundan dolayı $\left(\cdot|\cdot\right)$ fonksiyonu bir iç çarpım tanımlar. Gerçekten:

$$\begin{aligned}F\left(e_1,a\right)F\left(e_1,b\right)&=F\left(1e_1+0e_2,a_1e_1+a_2e_2\right)F\left(1e_1+0e_2,b_1e_1+b_2e_2\right)\\&=\left(1a_2-0a_1\right)\left(1b_2-0b_1\right)\\&=a_2b_2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}F\left(a,e_2\right)F\left(b,e_2\right)&=F\left(a_1e_1+a_2e_2,0e_1+1e_2\right)F\left(b_1e_1+b_2e_2,0e_1+1e_2\right)\\&=\left(a_11-a_20\right)\left(b_11-b_20\right)\\&=a_1b_1\end{aligned}$$

dir. Bu durumda

$$F\left(e_1,a\right)F\left(e_1,b\right)+F\left(a,e_2\right)+F\left(b,e_2\right)=\left(a_1b_1+a_2b_2\right)$$

olur. Şimdi ise (*) bağıntısının iç çarpımın özelliklerini sağladığı gösterelim:

(I_1): $\left(a|a\right)\geq 0$, $\left(a|a\right)=0$ ancak ve ancak $a=0$ olmalıdır. Gerçekten:

$\left(a|a\right)=a_1^2+a_2^2\geq 0$ dır. $a=0$ ise $a_1=a_2=0$ olur ve böylece $\left(a|a\right)=\left(0|0\right)=0$ olur.

(I_2): $\left(a|b\right)=\left(b|a\right)$ olduğu açıktır.

(I_3): $\left(a+b|c\right)=\left(a|c\right)+\left(b|c\right)$ olmalıdır. Burada $c=\left(g_1,g_2\right)$ olsun.

$$\begin{aligned}\left(a+b|c\right)&=F\left(e_1,a+b\right)F\left(e_1,c\right)+F\left(a+b,e_2\right)F\left(c,e_2\right)\\&=\left(a_2+b_2\right)g_2+\left(a_1+b_1\right)g_1 \qquad (*_1)\end{aligned}$$

olur.

$$\left(a|c\right)=\left(a_1g_1+a_2g_2\right)$$

$$\left(b|c\right)=\left(b_1g_1+b_2g_2\right)$$

olduğundan

$$\begin{aligned}\left(a|c\right)+\left(b|c\right)&=\left(a_1g_1+a_2g_2\right)+\left(b_1g_1+b_2g_2\right)\\&=\left(a_1+b_1\right)g_1+\left(a_2+b_2\right)g_2 \qquad (*_2)\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $(*_1)$ ve $(*_2)$ ’den $\left(a+b|c\right)=\left(a|c\right)+\left(b|c\right)$ olur.

(I_4): $(\alpha a|b)=\alpha(a|b)$ olmalıdır. Gerçekten:

$$
\begin{aligned}
(\alpha a|b) &= F(e_1,\alpha a)F(e_1,b)+F(\alpha a,e_2)F(b,e_2)\\
&= \alpha a_1 b_1 + \alpha a_2 b_2\\
&= \alpha(a_1 b_1 + a_2 b_2)\\
&= \alpha(a|b)
\end{aligned}
$$

olur.

Sonuç olarak (I_1)-(I_4) özellikleri sağlandığından (*) bağıntısı B_2 üzerinde bir iç çarpım tanımlar.

Sonuç 4.1.5: Eğer $|F(e_1,e_2)|=1$ ise $(\cdot|\cdot)$ çarpımına göre $\{e_1,e_2\}$, B_2 'nin bir ortanormal bazıdır.

İspat: $x=x_1e_1+x_2e_2$ olsun.

$$
\begin{aligned}
\|x\| &= \sqrt{(x|x)}\\
&= \left[\left[F(e_1,x)\right]^2+\left[F(x,e_2)\right]^2\right]^{\frac{1}{2}}\\
&= \left[\left[F(1e_1+0e_2,x_1e_1+x_2e_2)\right]^2+\left[F(x_1e_1+x_2e_2,0e_1+1e_2)\right]^2\right]^{\frac{1}{2}}\\
&= \left[x_2^2\left|F(e_1,e_2)\right|^2+x_1^2\left|F(e_1,e_2)\right|^2\right]^{\frac{1}{2}}\\
&= \left[x_2^2+x_1^2\right]^{\frac{1}{2}}\left|F(e_1,e_2)\right| = \left[x_2^2+x_1^2\right]^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}
$$

olduğundan iddianın doğruluğu görülür.

Sonuç 4.1.6: $(B_2,\|\cdot,\cdot\|)$ bir 2-Banach uzayı ve $(B_2,(\cdot|\cdot))$ bir gerçel iç çarpım uzayı olsun. Eğer

$$F(a,b)=(a|e_1)(b|e_2)-(a|e_2)(b|e_1)$$

biçiminde tanımlanır ise bu durumda $F(a,b)\in B_2^*$ dır.

İspat: $a=a_1e_1+a_2e_2$ ve $b=b_1e_1+b_2e_2$ olsun.

$$
\begin{aligned}
F(a,b) &= (a|e_1)(b|e_2)-(a|e_2)(b|e_1) \\
&= (a_1e_1+a_2e_2|e_1)(b_1e_1+b_2e_2|e_2)-(a_1e_1+a_2e_2|e_2)(b_1e_1+b_2e_2|e_1) \\
&= \left[a_1(e_1|e_1)+a_2(e_1|e_2)\right]\left[b_1(e_1|e_2)+b_2(e_2|e_2)\right] \\
&\quad -\left[a_1(e_1|e_2)+a_2(e_2|e_2)\right]\left[b_1(e_1|e_1)+b_2(e_1|e_2)\right] \\
&= a_1b_1(e_1|e_1)(e_1|e_2)+a_1b_2(e_1|e_1)(e_2|e_2) \\
&\quad +a_2b_1(e_1|e_2)(e_1|e_2)+a_2b_2(e_1|e_2)(e_2|e_2) \\
&\quad -a_1b_1(e_1|e_2)(e_1|e_1)-a_1b_2(e_1|e_2)(e_1|e_2) \\
&\quad -a_2b_1(e_2|e_2)(e_1|e_1)-a_2b_2(e_2|e_2)(e_1|e_2) \\
&= (a_1b_2-a_2b_1)\left((e_1|e_1)(e_2|e_2)-(e_1|e_2)^2\right) \\
&= (a_1b_2-a_2b_1)\|e_1,e_2\|\frac{\left[(e_1|e_1)(e_2|e_2)-(e_1|e_2)^2\right]}{\|e_1,e_2\|} \\
&= \|a,b\|\frac{F(e_1,e_2)}{\|e_1,e_2\|}
\end{aligned}
$$

olur. Böylece Sonuç 4.1.2 ’ye uygun olarak *F*, bir sınırlı lineer 2-fonksiyoneldir ve $\|F\| = \dfrac{|F(e_1,e_2)|}{\|e_1,e_2\|}$ dir.

Aşağıdaki sonuç fonksiyonel analizdeki Paralellik Kanununa benzerdir.

Sonuç 4.1.7: $(B_2,\|\cdot,\cdot\|)$ uzayında

$$\|x+y,z\|^2+\|x-y,z\|^2 = 2\left[\|x,z\|^2+\|y,z\|^2\right]$$

dir.

İspat: $x = x_1e_1+x_2e_2$, $y = y_1e_1+y_2e_2$ ve $z = z_1e_1+z_2e_2$ olsun.

$$
\begin{aligned}
\|x+y,z\|^2 &= |(x_1+y_1)z_2-(x_2+y_2)z_1|^2\|e_1,e_2\|^2 \\
&= \left[(x_1z_2-x_2z_1)+(y_1z_2-y_2z_1)\right]^2\|e_1,e_2\|^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\|x-y,z\|^2 &= |(x_1-y_1)z_2-(x_2-y_2)z_1|^2\|e_1,e_2\|^2 \\
&= \left[(x_1z_2-x_2z_1)-(y_1z_2-y_2z_1)\right]^2\|e_1,e_2\|^2
\end{aligned}
$$

olur. Bu durumda,

$$\begin{aligned}\|x+y,z\|^2+\|x-y,z\|^2 &= 2\left[\left(x_1z_2-x_2z_1\right)^2+\left(y_1z_2-y_2z_1\right)^2\right]\|e_1,e_2\|^2\\ &= 2\left[\|x,z\|^2+\|y,z\|^2\right]\end{aligned}$$

olur.

Teorem 4.1.10: $\left(B_2,\|\ .\ \|\right)$ bir Banach uzayı olsun. 2-norm

$$\|a,b\|=\frac{1}{2}\sup_{f,g\in F_{B_2}}\left|\det\begin{pmatrix} f(a) & g(a)\\ f(b) & g(b)\end{pmatrix}\right|$$

biçiminde tanımlansın. Burada F_{B_2}, normu ≥ 1 olan sınırlı lineer fonksiyonların kümesidir. Bu durumda $\left(B_2,\|\cdot,\cdot\|\right)$ bir 2-Banach uzayıdır.

İspat: Gähler (1964), $\left(B_2,\|\cdot,\cdot\|\right)$ 'nin bir 2-normlu vektör uzay olduğunu göstermiştir.

$\{a_n\}=\{a_{n1}e_1+a_{n2}e_2\}$ dizisi $\left(B_2,\|\cdot,\cdot\|\right)$ uzayında bir Cauchy dizisi olsun. Cauchy dizisi tanımından, $\lim\limits_{m,n\to\infty}\|a_n-a_m,c\|=0$ ve $\lim\limits_{m,n\to\infty}\|a_n-a_m,d\|=0$ olacak biçimde B_2 'de lineer bağımsız $c=c_1e_1+c_2e_2$ ve $d=d_1e_1+d_2e_2$ elemanları vardır. Yani,

$$\lim_{m,n\to\infty}\frac{1}{2}\sup\left|f\left(a_n-a_m\right)g(c)-f(c)\,g\left(a_n-a_m\right)\right|=0$$

ve

$$\lim_{m,n\to\infty}\frac{1}{2}\sup\left|f\left(a_n-a_m\right)g(d)-f(d)\,g\left(a_n-a_m\right)\right|=0$$

dır. Bu durumda her $f,g\in F_{B_2}$ için:

$$\begin{aligned}\lim_{m,n\to\infty}\Big(&\left[\left(a_{n1}-a_{m1}\right)f\left(e_1\right)+\left(a_{n2}-a_{m2}\right)f\left(e_2\right)\right]g(c)\\ &-\left[\left(a_{n1}-a_{m1}\right)g\left(e_1\right)+\left(a_{n2}-a_{m2}\right)g\left(e_2\right)\right]f(c)\Big)=0\end{aligned}$$

olur. Bu ifade düzenlenirse,

$$\begin{aligned}(1)\qquad \lim_{m,n\to\infty}\Big[&\left(a_{n1}-a_{m1}\right)\left(f\left(e_1\right)g(c)-g\left(e_1\right)f(c)\right)\\ &+\left(a_{n2}-a_{m2}\right)\left(f\left(e_2\right)g(c)-g\left(e_2\right)f(c)\right)\Big]=0\end{aligned}$$

olur. Benzer olarak,

$$\text{(2)} \qquad \lim_{m,n\to\infty}\Big[(a_{n1}-a_{m1})\big(f(e_1)g(d)-g(e_1)f(d)\big) + (a_{n2}-a_{m2})\big(f(e_2)g(d)-g(e_2)f(d)\big)\Big]=0$$

bulunur. Burada (1) numaralı denklem $\big(f(e_2)g(d)-g(e_2)f(d)\big)$ ve (2) numaralı denklem $\big(f(e_2)g(c)-g(e_2)f(c)\big)$ ile çarpılır ve daha sonra (1) ’den (2) çıkarılırsa

$$\begin{aligned}&\Big(\big[f(e_2)g(d)-g(e_2)f(d)\big]\big[f(e_1)g(c)-g(e_1)f(c)\big]\\ &-\big[f(e_2)g(c)-g(e_2)f(c)\big]\big[f(e_1)g(d)-g(e_1)f(d)\big]\Big)\\ &\times\Big[\lim_{m,n\to\infty}(a_{n1}-a_{m1})\Big]=0\end{aligned}$$

elde edilir. $\lim_{m,n\to\infty}(a_{n1}-a_{m1})\neq 0$ olduğu kabul edilsin. Bu durumda son eşitlikten $\lim_{m,n\to\infty}(a_{n1}-a_{m1})$ teriminin katsayısı sıfır olmalıdır. İfade düzenlenirse,

$$\big(g(e_1)f(e_2)-f(e_1)g(e_2)\big)f(c)g(d)=\big(g(e_1)f(e_2)-f(e_1)g(e_2)\big)f(d)g(c) \quad (*)$$

olur. $g(e_1)f(e_2)-f(e_1)g(e_2)=0$ kabul edilsin. Bu durumda lineerlikten

$$f\big(g(e_2)e_1-g(e_1)e_2\big)=0$$

olur.

$$\begin{aligned}0&\neq\|e_1,e_2\|\\ &=\frac{1}{2}\sup_{f,g\in F_{B_2}}\left|\det\begin{pmatrix}f(e_1) & g(e_1)\\ f(e_2) & g(e_2)\end{pmatrix}\right|\\ &=\frac{1}{2}\sup_{f,g\in F_{B_2}}\left|f(e_1)g(e_2)-f(e_2)g(e_1)\right|\end{aligned}$$

olduğundan $f(e_1)g(e_2)-f(e_2)g(e_1)\neq 0$ olacak biçimde *f*, *g* vardır. Bu durumda (*) ’dan

$$f(c)g(d)=f(d)g(c)$$

bulunur. Buradan ise,

$$f\big(g(d)c-g(c)d\big)=0$$

olur. Böylece buradan c ve d 'nin lineer bağımlılığı çıkar. Bu ise kabul ile çelişir. Sonuç olarak

$$\lim_{m,n\to\infty}\left(a_{n1}-a_{m1}\right)=0$$

olur, yani $\{a_{n1}\}$ bir gerçel Cauchy dizisi olur. Benzer olarak $\{a_{n2}\}$ 'de bir gerçel Cauchy dizisi olur. $b_1=\lim_{n\to\infty}a_{n1}$, $b_2=\lim_{n\to\infty}a_{n2}$ ve $a=b_1e_1+b_2e_2$ olsun. Her $b\in B_2$ için $\lim_{n\to\infty}\|a_n-a,b\|=0$ dır. Gerçekten $\lim_{n\to\infty}a_{n1}=b_1$ ve $\lim_{n\to\infty}a_{n2}=b_2$ olduğundan

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\|a_n-a,b\|&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\sup\left|f\left(a_n-a\right)g\left(b\right)-f\left(b\right)g\left(a_n-a\right)\right|\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\sup\Big|\left(a_{n1}-b_1\right)\left[f\left(e_1\right)g\left(b\right)-g\left(e_1\right)f\left(b\right)\right]\\&\qquad+\left(a_{n2}-b_2\right)\left[f\left(e_2\right)g\left(b\right)-g\left(e_2\right)f\left(b\right)\right]\Big|=0\end{aligned}$$

bulunur. Yani $\lim_{n\to\infty}a_n=a\in B_2$ dir.

Teorem 4.1.11: $\left(B_2,\|\cdot,\cdot\|\right)$ bir 2-Banach uzayı olsun. Teorem 4.1.5 'den dolayı $\left(B^*,\|\;.\;\|\right)$ bir 2-Banach uzayıdır. $f,g\in B$ olsun ve $[f,g]$, $[f,g]F=F(f,g)$ eşitliği ile tanımlansın. Bu durumda $[f,g]$, tanım kümesi B^* olan bir sınırlı lineer fonksiyoneldir ve

$$\|[f,g]\|\le\|f,g\|$$

dir.

İspat:

$$\begin{aligned}[f,g](F+G)&=(F+G)(f,g)\\&=F(f,g)+G(f,g)\\&=[f,g]F+[f,g]G\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}[f,g](aF)&=(aF)(f,g)\\&=aF(f,g)\\&=a\,[f,g]F\end{aligned}$$

dir. Ayrıca

$$\begin{aligned}\left|[f,g]F\right| &= \left|F(f,g)\right| \\ &\leq \|F\|.\|f,g\|\end{aligned}$$

dir. Bu yüzden $[f,g]$ $[f,g]$, tanım kümesi B^* olan bir sınırlı lineer fonksiyoneldir ve

$$\|[f,g]\| \leq \|f,g\|$$

dir.

5. DİĞER ÇALIŞMALAR

5.1 Genelleştirilmiş 2-Normlu Uzaylarda Hahn-Banach Teoremi

Tanım 5.1.1: X ve Y birer reel vektör uzayı olsun. $X \times Y$ 'nin boştan farklı bir alt kümesi D ile gösterilsin öyle ki her $x \in X$, $y \in Y$ için $D_x = \{y \in Y : (x, y) \in D\}$ $D^y = \{x \in X : (x, y) \in D\}$ kümeleri sırasıyla Y ve X uzaylarının lineer alt uzaylarıdır.

Aşağıdaki koşulları sağlayan, $\|\cdot,\cdot\| : D \to [0, \infty)$ fonksiyonuna D üzerinde ***bir genelleştirilmiş 2-norm*** denir:

(1) Her a reel sayısı ve her $(x, y) \in D$ için $\|x, a\,y\| = |a|\,\|x, y\| = \|a\,x, y\|$;

(2) $x \in X$, $y, z \in Y$ iken $(x, y), (x, z) \in D$ için $\|x, y + z\| \leq \|x, y\| + \|x, z\|$;

(3) $x, y \in X$, $z \in Y$ iken $(x, z), (y, z) \in D$ için $\|x + y, z\| \leq \|x, z\| + \|y, z\|$;

D kümesine ***2-normlu küme*** denir. Özel olarak, eğer $D = X \times Y$ ise $\|\cdot,\cdot\|$ fonksiyonuna $X \times Y$ üzerinde genelleştirilmiş bir 2-norm ve $(X \times Y, \|\cdot,\cdot\|)$ ikilisine de ***bir genelleştirilmiş 2-normlu uzay*** denir. Eğer $X = Y$ ise genelleştirilmiş 2-normlu uzay $(X \times X, \|\cdot,\cdot\|)$, $(X, \|\cdot,\cdot\|)$ biçiminde gösterilir. $X = Y$ olması durumda, $D^{-1} = \{(y, x) : (x, y) \in D\}$ iken $D = D^{-1}$ olur ve her $(x, y) \in D$ için $\|x, y\| = \|y, x\|$ dir. Burada $\|\cdot,\cdot\|$ fonksiyonu, ***bir genelleştirilmiş simetrik 2-norm*** ve D kümesi, bir ***simetrik 2-normlu küme*** olarak adlandırılır.

Gähler 'in 2-norm tanımı hatırlanırsa, $\|x, y\| = 0$ ancak ve ancak x ile y lineer bağlıdır, bu ifade Gähler 'in yaklaşımı ile Lewandoska 'nın yaklaşımı arasındaki en önemli farktır.

Örnek 5.1.1: X, $\|\cdot\|_1$ ve $\|\cdot\|_2$ gibi 2 yarı-norma sahip bir reel vektör uzayı olsun. Bu durumda $(X, \|\cdot,\cdot\|)$ ikilisi, $x, y \in X$ için

$$\|x, y\| = \|x\|_1 \, \|y\|_2$$

biçiminde tanımlanan 2-norm ile bir genelleştirilmiş 2-normlu uzaydır. Gerçekten:

1) $x, y \in X$ için,

$$\begin{aligned}\|x, a\,y\| &= \|x\|_1 \, \|a\,y\|_2 \\ &= \|x\|_1 \, |a| \, \|y\|_2 \\ &= |a| \, \|x\|_1 \, \|y\|_2 \\ &= \|a\,x\|_1 \, \|y\|_2 \\ &= \|a\,x, y\|\end{aligned}$$

2) $x, y, z \in X$ için,

$$\begin{aligned}\|x, y+z\| &= \|x\|_1 \, \|y+z\|_2 \\ &\leq \|x\|_1 \left(\|y\|_2 + \|z\|_2 \right) \\ &= \|x\|_1 \, \|y\|_2 + \|x\|_1 \, \|z\|_2 \\ &= \|x, y\| + \|x, z\|\end{aligned}$$

3) $x, y, z \in X$ için,

$$\begin{aligned}\|x+y, z\| &= \|x+y\|_1 \, \|z\|_2 \\ &\leq \left(\|x\|_1 + \|y\|_1 \right) \|z\|_2 \\ &= \|x\|_1 \, \|z\|_2 + \|y\|_1 \, \|z\|_2 \\ &= \|x, z\| + \|y, z\|\end{aligned}$$

Böylece $\left(X, \|\cdot, \cdot\| \right)$ ikilisi, bir genelleştirilmiş 2-normlu uzaydır.

Örnek 5.1.2: X, bir reel iç çarpım uzayı olsun. X, her $x, y \in X$ için,

$$\|x, y\| = \left| (x|y) \right|$$

biçiminde tanımlı 2-norm ile bir genelleştirilmiş simetrik 2-normlu uzaydır. Gerçekten:

1) $x, y \in X$ için,

$$\begin{aligned}\|x, a\,y\| &= \left| (x|a\,y) \right| \\ &= \left| a\,(x|y) \right|\end{aligned}$$

$$=|a|\left|(x|y)\right|$$

ve

$$\|a\,x,y\|=\left|(a\,x|y)\right|$$
$$=\left|a\,(x|y)\right|$$
$$=|a|\left|(x|y)\right|$$

dir. Böylece $\|x,a\,y\|=\|a\,x,y\|$ olur.

2) $x,y,z\in X$ için,

$$\|x,y+z\|=\left|(x|y+z)\right|$$
$$=\left|(x|y)+(x|z)\right|$$
$$\leq\left|(x|y)\right|+\left|(x|z)\right|$$
$$=\|x,y\|+\|x,z\|$$

3) $x,y,z\in X$ için,

$$\|x+y,z\|=\left|(x+y|z)\right|$$
$$=\left|(x|z)+(y|z)\right|$$
$$\leq\left|(x|z)\right|+\left|(y|z)\right|$$
$$=\|x,z\|+\|y,z\|$$

Böylece *X*, bir genelleştirilmiş simetrik 2-normlu uzaydır.

Örnek 5.1.3: *s*, tüm reel sayı dizilerinin lineer uzayı olsun.
Bu durumda

$$D=\left\{(x,y)\in s\times s:\|x,y\|=\sum_{n=1}^{\infty}|x_n||y_n|<\infty\right\}$$

kümesi bir simetrik 2-normlu küme ve $\|\cdot,\cdot\|:D\rightarrow[0,\infty)$ fonksiyonu da D üzerinde bir genelleştirilmiş simetrik 2-normdur. Gerçekten:

1) $x=\{x_n\},y=\{y_n\}\in s$ için,

$$\begin{aligned}\|x, a\,y\| &= \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|\,|a\,y_n| \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|\,|a|\,|y_n| \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} |a\,x_n|\,|y_n| \\ &= \|a\,x, y\|\end{aligned}$$

2) $x = \{x_n\}, y = \{y_n\}, z = \{z_n\} \in s$ için,

$$\begin{aligned}\|x, y+z\| &= \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|\,|y_n + z_n| \\ &\le \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|\left(|y_n| + |z_n|\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|\,|y_n| + \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|\,|z_n| \\ &= \|x, y\| + \|x, z\|\end{aligned}$$

3) $x = \{x_n\}, y = \{y_n\}, z = \{z_n\} \in s$ için,

$$\begin{aligned}\|x+y, z\| &= \sum_{n=1}^{\infty} |x_n + y_n|\,|z_n| \\ &\le \sum_{n=1}^{\infty} \left(|x_n| + |y_n|\right)|z_n| \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|\,|z_n| + \sum_{n=1}^{\infty} |y_n|\,|z_n| \\ &= \|x, z\| + \|y, z\|\end{aligned}$$

Böylece $\|\cdot,\cdot\|$ fonksiyonu, D üzerinde bir genelleştirilmiş simetrik 2-norm olur.

Tanım 5.1.2: X, bir reel vektör uzayı, $D \subseteq X \times X$ kümesi, bir 2-normlu küme ve Y, bir normlu uzay olsun. $F : D \to Y$ operatörü,

i) Her $a, b, c, d \in X$ için $F(a+c, b+d) = F(a,b) + F(a,d) + F(c,b) + F(c,d)$ öyle ki $a, c \in D^b \cap D^d$.

ii) Her $a, b \in \mathbb{R}$ ve her $(a,b) \in D$ için $F(a\,a, b\,b) = a\,b\,F(a,b)$.

koşullarını sağlıyor ise bu operatöre ***2-lineer*** denir.

Tanım 5.1.3: *X*, bir reel vektör uzayı, $D \subseteq X \times X$ kümesi, bir 2-normlu küme ve *Y*, bir normlu uzay $F : D \to Y$ bir operatör olsun. Eğer $(a,b) \in D$ iken $\|F(a,b)\| \leq K \|a,b\|$ olacak biçimde bir pozitif *K* sayısı varsa *F* 'e ***sınırlıdır*** denir. Burada $\|F\| = \inf\{K > 0 : \|F(a,b)\| \leq K\|a,b\|, (a,b) \in D\}$ sayısına 2-lineer *F* operatörünün normu denir.

Örnek 5.1.4: Örnek 5.1.1 'deki $(X, \|\cdot,\cdot\|)$ uzayı ele alınsın ve $F : X \times X \to \mathbb{R}$ operatörü $F(x,y) = (x|y)$ biçiminde tanımlansın. $a,b,c,d \in X$ için,

$$
\begin{aligned}
F(a+c, b+d) &= (a+c|b+d) \\
&= (a+c|b) + (a+c|d) \\
&= (a|b) + (c|b) + (a|d) + (c|d) \\
&= F(a,b) + F(c,b) + F(a,d) + F(c,d)
\end{aligned}
$$

olur. $a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$
\begin{aligned}
F(a\,a, b\,b) &= (a\,a|b\,b) \\
&= a\,b\,(a|b) \\
&= a\,b\,F(a,b)
\end{aligned}
$$

olur. Böylece *F*, bir 2-lineer operatördür.

$$
\begin{aligned}
\|F(x,y)\| &= |F(x,y)| \\
&= |(x|y)| \\
&= 1.\|x,y\|
\end{aligned}
$$

dir. Burada $\|F\| = 1$ olur ve böylece *F*, sınırlıdır. Sonuç olarak *F*, bir sınırlı 2-lineer operatördür.

Teorem 5.1.1: $(X, \|\cdot,\cdot\|)$ bir genelleştirilmiş 2-normlu uzay ve *M*, $X \times X$ 'in bir lineer alt uzayı olsun. Eğer F_0, *M* üzerinde bir reel sınırlı 2-lineer fonksiyonel ise, o zaman F_0 ’ın $X \times X$ üzerine genişlemesi olan bir F, reel sınırlı fonksiyoneli vardır öyle ki, her $(a,b) \in M$ için,

$$F(a,b) = F_0(a,b) \text{ ve } \|F\| = \|F_0\|$$

dir.

İspat: Eğer $M = X \times X$ veya $\|F_0\| = 0$ ise bu durumda $F = F_0$ alınır, aksi halde genelliği kaybetmeksizin $\|F_0\| = 1$ kabul edilsin. F_0 ’ın normu 1 olan bütün genişlemelerinin A ailesi göz önüne alınsın, yani L, $X \times Y$ ’nin M ’yi kapsayan bir alt uzayı ve G, $G : L \to \mathbb{R}$ olacak biçimde bir sınırlı 2-lineer operatör iken bütün (G, L) ikililerinin kümesi ele alınsın öyle ki, her $(a,b) \in M$ için,

$$G(a,b) = F_0(a,b) \text{ ve } \|G\| = 1$$

dir. A, $\leq$ bağıntısı ile şu şekilde kısmi sıralıdır: $(G_1, L_1), (G_2, L_2) \in A$ verildiğinde $(G_1, L_1) \leq (G_2, L_2)$ olması için gerek ve yeter koşul G_2 ’nin G_1 ’in genişlemesi olmasıdır, yani $L_1 \subseteq L_2$, her $(a,b) \in L_1$ için $G_2(a,b) = G_1(a,b)$ ve $\|G_2\| = \|G_1\|$ olmasıdır.

A ailesi boş değildir, çünkü $(F_0, M) \in A$ dır. T, A ’nın lineer olarak, sıralı bir alt kümesi olsun. $\tilde{L} = \bigcup_{(G,L)\in T} L$ olarak tanımlansın. Açıkça görülür ki $\tilde{L}$, $X \times X$ için M ’yi kapsayan bir reel lineer alt uzaydır. $\tilde{G}$ operatörü ise $\tilde{G} : \tilde{L} \to \mathbb{R}$, $\tilde{G}(a,b) = G(a,b)$ şeklinde tanımlanıyor, burada G, (a,b) ’yi içeren bir L ile ikili oluşturur ve $(G, L) \in T$ dir. $\tilde{G}$ operatörü iyi tanımlıdır, çünkü, eğer L_i ve L_j ’nin her ikisi de (a,b) ’yi kapsıyorlarsa o zaman, ya $(G_i, L_i) \leq (G_j, L_j)$ veya $(G_j, L_j) \leq (G_i, L_i)$ olduğundan $G_i(a,b) = G_j(a,b)$ olur. Görüldüğü üzere $\tilde{G}$, $\tilde{L}$ üzerinde bir sınırlı 2-lineer operatördür, yani her G ’nin bir genişlemesidir ve $\|G\| = 1$ dir. Böylece T zinciri için bir üst sınır olan $(\tilde{G}, \tilde{L})$ ikilisi oluşmuş oldu. Zorn

Lemmasına göre A 'nın bir $(F, L_m) \in A$ maksimal elemanı vardır. İspatın tamamlanması için $L_m = X \times X$ olduğunu göstermek yeterlidir. Varsayalım ki karşıt olarak $(a_0, b_0) \in X \times X \setminus L_m$ olsun. Bu durumda $L' = L_m + \mathbb{R}(a_0, b_0) = \{a + ta_0, b + t'b_0 : (a,b) \in L_m \text{ ve } t, t' \in \mathbb{R}\}$ lineer uzayı göz önüne alınsın. $(a,b) \in L_m$ ve $g \in \mathbb{R}$ için, $F' : L' \to \mathbb{R}$ fonksiyonu,

$$F'(a + ta_0, b + t'b_0) = F(a,b) - tt'g$$

biçiminde tanımlansın. Burada $(a,b) \in L_m$ ve $g \in \mathbb{R}$ öyle seçilsin ki $\|F'\| = 1$ olsun.

$\|F'\| = 1$ olması, $(a,b) \in M$ ve $g \in \mathbb{R}$ için,

$$\left|F(a,b) - tt'g\right| \leq \|a + ta_0, b + t'b_0\| \qquad (1)$$

olmasını sağlar. Burada $t, t' \in \mathbb{R}$ iken (a,b) 'nin yerine $(-ta, -t'b)$ alınsın ve (1) eşitsizliğinin her iki tarafı $|tt'|$ ile bölünsün. Bu durumda

$$\left|F(a,b) - g\right| \leq \|a - a_0, b - b_0\| \qquad (2)$$

bulunur. F 2-lineer olduğundan, g 'nın

$$F(a,b) - \|a - a_0, b - b_0\| \leq g \leq F(a,b) + \|a - a_0, b - b_0\|$$

eşitsizliğini sağlayacak biçimde seçilmesiyle (2) numaralı ve dolayısıyla (1) numaralı eşitsizlikler sağlanır. Görüldüğü üzere her $(a,b) \in M$ için g vardır çünkü

$$F(a,b) - \|a - a_0, b - b_0\| \leq F(a,b) + \|a - a_0, b - b_0\|$$

eşitsizliği elde edildi. Böylece $(F', L') \in A$, $(F, L_m) \neq (F', L')$ ve $(F, L_m) \leq (F', L')$ olduğu ispat edilmiş oldu. Bu durum (F, L_m) 'nin A 'nın maksimal elemanı olması ile çelişir. Bu çelişki $L_m \neq X \times X$ kabul edilerek elde edildi. Bu durumda $L_m = X \times X$ olur ve ispat tamamlanır.

Teorem 5.1.2: x_0, y_0 vektörleri, genelleştirilmiş $\left(X, \|\cdot,\cdot\|\right)$ 2-normlu uzayında $\|x_0, y_0\| \neq 0$ koşulunu sağlayan iki vektör olsun. Bu durumda bu uzay üzerinde tanımlı ve

$$F\left(x_0, y_0\right) = \|x_0, y_0\| \text{ ve } \|F\| = 1$$

olacak biçimde bir reel sınırlı 2-lineer *F* fonksiyoneli vardır.

İspat: *M* lineer uzayı

$$M = \mathbb{R}\left(x_0, y_0\right) = \left\{\left(tx_0, t'y_0\right) : t, t' \in \mathbb{R}\right\}$$

olarak tanımlansın. *M* üzerinde F_0 fonksiyoneli aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$F_0 : M \to \mathbb{R}; F_0\left(tx_0, t'y_0\right) = tt'\|x_0, y_0\|$$

Açıktır ki F_0, $F_0\left(x_0, y_0\right) = \|x_0, y_0\|$ özelliğini sağlayan bir 2-lineer fonksiyoneldir, üstelik bir $\left(x, y\right) \in M$ için

$$\begin{aligned} \left|F\left(x, y\right)\right| &= \left|tt'\right| \|x_0, y_0\| \\ &= \|tx_0, t'y_0\| \\ &= \|x, y\| \end{aligned}$$

olduğundan görülür ki F_0, bir sınırlı lineer 2-fonksiyoneldir ve $\|F_0\| = 1$ dir.

Son teorem, F_0 'ın genişlemesi olan, tüm uzay üzerinde tanımlı, bir sınırlı 2-lineer fonksiyonel F 'in varlığını göstermek için uygulanır ve aynı F_0 'ın normu gibi norm alınırsa, $\|F\| = 1$ olur.

Yukarıdaki teoremin bir sonucu olarak aşağıdaki sonuç yazılabilir.

Sonuç 5.1.1: Eğer *X*, trivial olmayan uzaysa (yalnızca sıfır vektöründen ibaret değilse) bu uzay üzerinde sıfır olmayan bir sınırlı 2-lineer fonksiyoneller var olmalıdır.

KAYNAKLAR

COZBAS, S., MUSTUTA, C., Extension of Bilinear Fonctionals And Best Approximation, Studia Unv., Babes-Bolyai Math., 43, No.2 (1998),1-13.

ELUMALAI, E., RAVİ, R., On Remotal Points of Pairs of Sets In Linear 2-Normed Spaces, Bull Cal. Math. Soc., 86, (1994), 63-68.

FRANİĆ, I., An Extension Theorem For A Bounded Linear 2-Fonctionals And Applications, Math. Japonica 40, No.1 (1994), 79-85.

FREESE, R., CHO, Y., Geometry of Linear 2-Normed Spaces, Nova Science Publishers, 2001.

GÄHLER, S., Lineare 2-Normite Raume, Math. Nachr., 28 (1964), 1-43.

HAASER, N. B., SULLIVAN, J. A., Real Analysis, Dover Pablications Inc., New York, 1991.

LEWANDOWSKA, Z., MOSLEHIAN, M. S., MOGHADDAM, A. S., Hahn-Banach Theorem In Generalized 2-Normed Spaces, Communications In Mathematical Analysis, Vol. 1. No.2 (2006) 109-113.

RUDİN, W., Functional Analysis, Tata McGraw-Hill Publishing Com. Ltd., New Delhi, 1976.

WHİTE, A., 2-Banach Spaces, Math. Nachr., 42 (1969), 43-60

ÖZGEÇMİŞ

1981 yılında Adana ’da doğdu. İlk ve orta öğrenimini Adana ’da tamamladı. 1999 yılında Ege Üniversitesi Matematik Bölümünü kazandı. 2004 yılında üniversite öğrenimimi tamamladı. 2005 yılında Çukurova Üniversitesinde Orta Öğretim Alan Öğretmenliği Tezsiz Y.L. programına girip 2007 yılında tamamladı. Ayrıca 2004 yılından itibaren çeşitli özel kurumların üniversite hazırlık bölümlerinde Matematik öğretmeni olarak çalıştı. 2008 yılında Çukurova Üniversitesi Matematik Bölümünde yüksek lisans programına girdi.